

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND VII, HEFT 4 (SCHLUSSHEFT)

MIT 28 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 30. NOVEMBER 1953)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1953

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)
Wien I, Mülkerbastei 5

zu senden, alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien I, Mülkerbastei 5
Tel. U 28 5 60, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzellen mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Der Verlag.

Band VII, Heft 4

Inhaltsverzeichnis

Originalarbeiten.	Seite
H. Jung, Berechnung des Niederhalterdrucks beim Tiefziehen. (Mit 6 Textabbildungen.) ...	273
K. Schaden, Die Biegefestigkeit von Balken auf zwei Stützen aus bildsamen, spröden und Verbundwerkstoffen. (Mit 6 Textabbildungen.)	284
W. Starnberg, Verdrehung bildsamer Metallstäbe über die Fließgrenze. (Mit 4 Textabbildungen.)	299
A. Slibar und K. Desoyer, Zur Schwingungstilgung bei Sternmotoren. (Mit 3 Textabbildungen.)	309
F. Müller-Magyari, Endliche Deformationen dünner Plattenstreifen mit freien Längsrändern. (Mit 2 Textabbildungen.)	319
R. Bereis, Der Zykloidenraster. (Mit 3 Textabbildungen.)	328
K. Holecek, Ein Beitrag zum Maschinenrechnen: Die Berechnung vielstelliger Quotienten nach dem Aufbauverfahren. (Mit 4 Textabbildungen.)	331
M. Z. E. Krzywoblocki, Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow. B. Super- and Transonic Flow.	336
Buchbesprechung	370
Funk, P., H. Sagan und F. Selig, Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung (E. Hlawka).	

Berechnung des Niederhalterdrucks beim Tiefziehen.

Von H. Jung, Stuttgart.

Mit 6 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Mit den in Teil I gewonnenen Ergebnissen wird gezeigt, daß die bisher vernachlässigte Aufstauchung der Platine einen wesentlichen Einfluß auf den Niederhalterdruck beim Tiefziehen hat. Im Anschluß daran wird die Bedingung für die Faltenbildung beim Tiefziehen mit vereinfachenden Annahmen aufgestellt. Der zur Berechnung des Niederhalterdruckes benötigte Rechenaufwand wird skizziert. Die ermittelten Zahlenwerte für den Niederhalterdruck stimmen mit den Versuchswerten gut überein. Die bei der Berechnung des Niederhalterdruckes gemachten Annahmen wurden durch Versuche jeweils überprüft.

Summary. The results derived from the contents of Part I are such as to reveal that the hitherto neglected upsetting of the flat bar exercises a considerable influence on the retaining pressure in deep drawing. In connexion thereto the conditions for the formation of folds in deep drawing are set forth on basis of simplified assumptions. The method of calculating the retaining pressure is shortly discussed. The values ascertained in this manner for the retaining pressure are in line with those obtained by tests. The assumptions on which the retaining pressure is calculated are in each and every case checked by adequate tests.

Résumé. Les résultats obtenus dans la Première Partie démontrent que le refoulement, jusqu'à présent négligé, de la plaque exerce une influence considérable sur la pression de retention dans les travaux d'emboutissage. Profitant des nouvelles notions l'auteur formule les conditions concernant la formation de plis au cours de l'emboutissage à la base de données simplifiées, en indiquant en même temps la méthode de calcul qu'il recommande pour se rendre compte de la pression de retention. Les valeurs de la pression de retention établies de cette manière coïncident assez bien avec les résultats des essais. Les suppositions à la base desquelles la pression de retention est calculée sont contrôlées par des essais en chaque cas particulier.

I. Problemstellung.

Gegeben sei eine runde Blechscheibe vom Durchmesser $2r_a$ und der Dicke h . Aus dieser Blechscheibe soll ein Näpfchen vom Durchmesser $2r_0$ und der Wandstärke h hergestellt werden. Der Deformationsvorgang wird mit dem durch Abb. 1 in vereinfachter Form gegebenen Werkzeug durchgeführt.

Bewegt sich der Stempel S nach unten, so wird das Blech (Platine) in die Bohrung eingezogen. Dieses Einziehen führt in dem auf der Matrize aufliegenden Teil zu Radial- und Tangentialspannungen. Überschreiten diese Spannungen einen kritischen Wert, so tritt Faltenbildung auf. Beim weiteren Einziehen der Platine müssen diese Falten wieder „ausgebügelt“ werden. Dieses

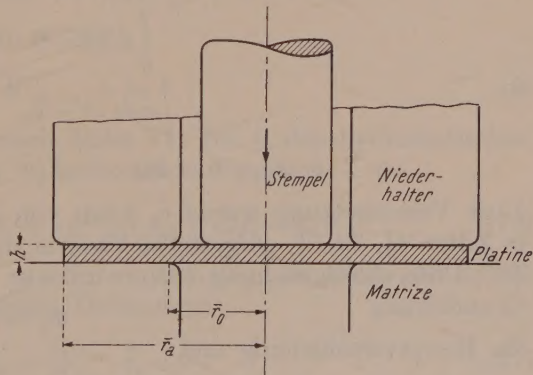


Abb. 1. Werkzeug.

Ausbügeln vergrößert die Stempelkraft und ergibt eine Verschlechterung der Oberflächenbeschaffenheit des Werkstückes. Setzt man auf die Platine einen Niederhalter mit der Kraft P_N auf, so läßt sich, sofern P_N einen Minimalwert überschreitet, die Faltenbildung, die von der Biegesteifigkeit der Platine und dem Ziehverhältnis r_0/r_a abhängt, verhindern.

Es soll nun versucht werden, mit der in Teil I aufgestellten Theorie einen Einblick in die Vorgänge beim Tiefziehen zu gewinnen. In Ziffer II wird angenommen, daß die Platine während des Ziehvorganges ihre Dicke h beibehält und die an der Ziehkante auftretenden Biegespannungen auf den Niederhalterdruck keinen Einfluß haben. Es lassen sich dann die Spannungen und Dehnungen näherungsweise bestimmen. Aus den Spannungen kann dann der Niederhalterdruck berechnet werden. Hierbei zeigt es sich, daß die Voraussetzung der konstanten Dicke h zu außerordentlich hohen Niederhalterdrücken führt, die technisch nicht realisiert werden können. Ziffer III gibt eine Näherungstheorie zur Bestimmung der Beulgrenze, wobei eine Aufstauchung der Platine zugelassen wird. Der außerordentlich umfangreiche Rechnungsgang zur Bestimmung des Niederhalterdruckes wird dann in Ziffer IV skizziert. Für das in Ziffer V angegebene Zahlenbeispiel wurde die Rechnung durchgeführt und die Endergebnisse angegeben. Es zeigt sich hierbei, daß eine gute Übereinstimmung mit den mir bekannten Versuchsergebnissen erreicht wird.

II. Ziehvorgang bei konstanter Dicke h .

Die Platine wird entlang des Kreises $r = r_0$ aufgeschnitten (Abb. 2) und dort eine Verschiebung c_0 vorgeschrieben. Es wird nun angenommen, daß diese Verschiebung c_0 klein von erster Ordnung gegenüber den sonstigen Abmessungen der Platine ist. Am Außenrand der Platine ist die Radialspannung

$$\sigma_{r_a} = 0.$$

Es muß in den Punkten

$$z = h \begin{cases} r = r_0 \\ r = r_a \end{cases}, \quad z = 0 \begin{cases} r = r_0 \\ r = r_a \end{cases}$$

die Druckspannung

$$\sigma_z = 0$$

angenommen werden, wie aus den Gleichgewichtsbedingungen hervorgeht. Die Randbedingungen des vorliegenden Problems lauten in gemilderter Form

$$w = 0 \quad \text{für} \quad z = 0 \quad \text{und} \quad z = h \quad \text{im Bereich} \quad r_0 \leq r \leq r_a, \quad (1)$$

$$\int_0^b \sigma_r dz = 0 \quad \text{für} \quad r = r_a, \quad (2)$$

$$\int_0^b u dz = -\bar{c}_0 \quad \text{für} \quad r = r_0, \quad (3)$$

$$\sigma_z = 0 \quad \text{für} \quad z = h, \quad r = r_0 \quad \text{und} \quad r = r_a. \quad (4)$$

Laut Voraussetzung wurde \bar{c}_0 klein von erster Ordnung angenommen, so daß die in Ziffer VI, Teil I, aufgestellte Theorie zur Anwendung kommen kann. Die Lösung der Differentialgleichung (37)_I wird aus zwei Teillösungen aufgebaut, wobei die Grundleistung

$$\Phi_1 = c_1 \ln r \quad (5)$$

die Hauptverschiebung und

$$\Phi_2 = \sin \lambda z [a_1 J_0(i \lambda r) + a_2 N_0(i \lambda r)] + \cos \lambda z [b_1 J_0(i \lambda r) + b_2 N_0(i \lambda r)] \quad (6)$$

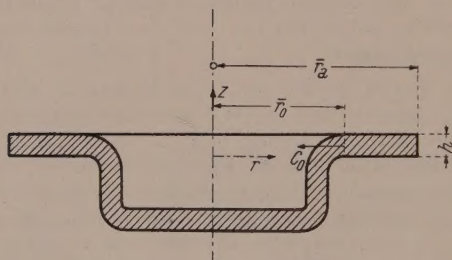


Abb. 2. Werkstück.

die örtlichen Störungen berücksichtigt. Mit (5) und (6) erhält man nach Ziffer VI, Teil I die Verschiebungen und Dehnungen

$$\left. \begin{aligned} u &= -i\lambda \sin \lambda z [a_1 J_1(i\lambda r) + a_2 N_1(i\lambda r)] - \\ &\quad - i\lambda \cos \lambda z [b_1 J_1(i\lambda r) + b_2 N_1(i\lambda r)] + \frac{c_1}{r}, \\ w &= \lambda \cos \lambda z [a_1 J_0(i\lambda r) + a_2 N_0(i\lambda r)] - \lambda \sin \lambda z [b_1 J_0(i\lambda r) + b_2 N_0(i\lambda r)], \\ \varepsilon_r &= \lambda^2 \sin \lambda z \left[a_1 \left(J_0(i\lambda r) - \frac{1}{i\lambda r} J_1(i\lambda r) \right) + a_2 \left(N_0(i\lambda r) - \frac{1}{i\lambda r} N_1(i\lambda r) \right) \right] + \\ &\quad + \lambda^2 \cos \lambda z \left[b_1 \left(J_0(i\lambda r) - \frac{1}{i\lambda r} J_1(i\lambda r) \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_2 \left(N_0(i\lambda r) - \frac{1}{i\lambda r} N_1(i\lambda r) \right) \right] - \frac{c_1}{r^2}, \\ \varepsilon_\varphi &= \lambda^2 \sin \lambda z \left[\frac{a_1}{i\lambda r} J_1(i\lambda r) + \frac{a_2}{i\lambda r} N_1(i\lambda r) \right] + \\ &\quad + \lambda^2 \cos \lambda z \left[\frac{b_1}{i\lambda r} J_1(i\lambda r) + \frac{b_2}{i\lambda r} N_1(i\lambda r) \right] + \frac{c_1}{r^2}, \\ \varepsilon_z &= -\lambda^2 \sin \lambda z [a_1 J_0(i\lambda r) + a_2 N_0(i\lambda r)] - \lambda^2 \cos \lambda z [b_1 J_0(i\lambda r) + b_2 N_0(i\lambda r)]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Setzt man den in (6) auftretenden Parameter der Zylinderfunktionen

$$\lambda = \frac{n\pi}{h},$$

so führt die Randbedingung (1) auf

$$a_1 = a_2 = 0.$$

Die Randbedingung (3) ergibt, da hierbei die Störfunktion Φ_2 bei der Integration verschwindet,

$$\frac{c_1}{r_0} = -\bar{c}_0.$$

Es ist nun zweckmäßig, an Stelle der Bessel-Funktionen J_0 und N_0 die Hankel-Funktionen $H_0^{(1)}$ und $H_0^{(2)}$ einzuführen, um einfache Näherungsausdrücke für die Spannungen ableiten zu können. Mit den Hankel-Funktionen und (7) erhält man die Spannungen in der Form

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left\{ -\frac{c_1}{r^2} + \lambda^2 \cos \lambda z \left[b_1 \left(H_0^{(1)}(i\lambda r) - \frac{1}{i\lambda r} H_1^{(1)}(i\lambda r) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_2 \left(H_0^{(2)}(i\lambda r) - \frac{1}{i\lambda r} H_1^{(2)}(i\lambda r) \right) \right] \right\} g(\sqrt{2}\sqrt{K}) + \kappa_0, \\ \sigma_\varphi &= \left\{ \frac{c_1}{r^2} + \lambda^2 \cos \lambda z \left[\frac{b_1}{i\lambda r} H_1^{(1)}(i\lambda r) + \frac{b_2}{i\lambda r} H_1^{(2)}(i\lambda r) \right] \right\} g(\sqrt{2}\sqrt{K}) + \kappa_0, \\ \sigma_z &= \left\{ -\lambda^2 \cos \lambda z [b_1 H_0^{(1)}(i\lambda r) + b_2 H_0^{(2)}(i\lambda r)] \right\} g(\sqrt{2}\sqrt{K}) + \kappa_0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Geht man mit der ersten Gl. (8) in (2) ein, so wird

$$\frac{c_1}{r_a^2} g(\sqrt{2}\sqrt{K})_{r=r_a} = \kappa_0. \quad (9)$$

In (8) und (9) ist κ_0 eine Konstante, die nach Ziffer VI, Teil I, den hydrostatischen Spannungszustand berücksichtigt. Die in (9) auftretende Funktion K ist

$$K = \frac{1}{3} J_1^2 - J_2 = \frac{1}{3} (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z)^2 - \varepsilon_r \varepsilon_\varphi - \varepsilon_r \varepsilon_z - \varepsilon_\varphi \varepsilon_z. \quad (10)$$

Für die Durchführung der Rechnung ist es nun zweckmäßig, an Stelle der in (7) gegebenen Dehnung nur die aus (5) folgenden Dehnungen

$$\bar{\varepsilon}_r = -\frac{c_1}{r^2}, \quad \bar{\varepsilon}_\varphi = \frac{c_1}{r^2}, \quad \bar{\varepsilon}_z = 0 \quad (11)$$

in (10) einzusetzen.

Geht man mit (8) in die Randbedingung (4) ein, dann erhält man

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{c_1}{\lambda^2 r_a^2} \frac{g(\sqrt{2} \sqrt{K})_{r=r_a}}{H_0^{(1)}(i \lambda r_a) H_0^{(2)}(i \lambda r_0) - H_0^{(1)}(i \lambda r_0) H_0^{(2)}(i \lambda r_a)}, \\ b_2 &= -\frac{c_1}{\lambda^2 r_a^2} \frac{g(\sqrt{2} \sqrt{K})_{r=r_a}}{H_0^{(1)}(i \lambda r_a) H_0^{(2)}(i \lambda r_0) - H_0^{(1)}(i \lambda r_0) H_0^{(2)}(i \lambda r_a)}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Beachtet man, daß $\lambda r \gg 1$ ist, so können an Stelle der Hankel-Funktionen ihre asymptotischen Annäherungen

$$H_0^{(1)} \approx \frac{1}{i} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} e^{-\lambda r}, \quad H_1^{(1)} \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} e^{-\lambda r}, \quad H_0^{(2)} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} e^{\lambda r}, \quad H_1^{(2)} \approx i \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} e^{\lambda r}$$

in (12) eingesetzt werden. Damit geht (12) über in

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= i \frac{c_1}{\lambda^2 r_a^2} \frac{g(\sqrt{2} \sqrt{K})_{r=r_a}}{g(\sqrt{2} \sqrt{K})_{r=r_0}} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r_a}} e^{\lambda r_a} - \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r_0}} e^{\lambda r_0}}{\frac{2}{\pi \lambda} \sqrt{\frac{1}{r_a r_0}} (e^{-\lambda(r_a-r_0)} - e^{\lambda(r_a-r_0)})}, \\ b_2 &= -\frac{c_1}{\lambda^2 r_a^2} \frac{g(\sqrt{2} \sqrt{K})_{r=r_a}}{g(\sqrt{2} \sqrt{K})_{r=r_0}} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r_a}} e^{-\lambda r_a} - \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r_0}} e^{-\lambda r_0}}{\frac{2}{\pi \lambda} \sqrt{\frac{1}{r_a r_0}} (e^{-\lambda(r_a-r_0)} - e^{\lambda(r_a-r_0)})}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die Ausdrücke (13) lassen sich noch weiter vereinfachen, wenn

$$e^{-\lambda(r_a-r_0)} \quad \text{gegen} \quad e^{\lambda(r_a-r_0)}$$

vernachlässigt wird. Man erhält dann

$$\left. \begin{aligned} b_1 &\approx -i \frac{c_1}{\lambda^2 r_a^2} \frac{g(\sqrt{2} \sqrt{K})_{r=r_a}}{g(\sqrt{2} \sqrt{K})_{r=r_0}} \frac{1}{\sqrt{2 \pi \lambda}} \sqrt{r_0} e^{\lambda r_0}, \\ b_2 &\approx -\frac{c_1}{\lambda^2 r_a^2} \frac{1}{\sqrt{2 \pi \lambda}} \sqrt{r_a} e^{-\lambda r_a}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Geht man mit (14) in die drei Gl. (8) ein und ersetzt dort ebenfalls die Hankel-Funktionen durch ihre asymptotischen Annäherungen, so wird

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \lambda^2 \cos \lambda z \left[\frac{c_1}{\lambda^2 r_a^2} \frac{g(\sqrt{2} \sqrt{K})_{r=r_a}}{g(\sqrt{2} \sqrt{K})_{r=r_0}} \sqrt{\frac{r_0}{r}} e^{\lambda(r_0-r)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_1}{\lambda^2 r_a^2} \sqrt{\frac{r_a}{r}} e^{-\lambda(r_a-r)} \right] g(\sqrt{2} \sqrt{K}) + \kappa_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Die Gl. (15) ergibt nun einige wesentliche Aufschlüsse für die Berechnung des Niederhalterdruckes.

Die durch die Störfunktion bedingte Spannung

$$\sigma_{zs} = \lambda^2 \cos \lambda z \left[\frac{g(\sqrt{2} \sqrt{K})_{r=r_a}}{g(\sqrt{2} \sqrt{K})_{r=r_0}} \sqrt{\frac{r_0}{r}} e^{\lambda(r_0-r)} \sqrt{\frac{r_a}{r}} e^{-\lambda(r_a-r)} \right] g(\sqrt{2} \sqrt{K}) \frac{c_1}{\lambda^2 r_a^2} \quad (16)$$

hat keinen Einfluß auf den Niederhalterdruck, da sie außerordentlich rasch abklingt. Der Niederhalterdruck hängt im wesentlichen nur von dem konstanten hydrostatischen Spannungszustand κ_0 ab und ist

$$P_N = -\frac{c_0 r_0}{r_a^2} g(\sqrt{2} \sqrt{K})_{r=r_a} \pi (r_a^2 - r_0^2) \quad [\text{kg}]. \quad (17)$$

Aus (17) ergibt sich der sogenannte spezifische Niederhalterdruck zu

$$p_N \approx -\frac{\bar{c}_0 r_0}{r_a^2} g \left(\sqrt{2} \sqrt{K} \right)_{r=r_a} [\text{kg/cm}^2]. \quad (18)$$

Rechnet man mit (17) und (18) das in Ziffer V gegebene Zahlenbeispiel durch, so zeigt es sich, daß diese Niederhalterdrücke mit den im Versuch ermittelten nicht übereinstimmen.

Wird eine Platine nur etwa ein Drittel in die Matrize eingezogen und dann aus dem Werkzeug entnommen, so lassen sich die Aufstauchungen im entlasteten Zustand messen. Es zeigt sich hierbei, daß die Dehnungen ε_z an der Ziehkante ein Maximum haben, das nach außen abklingt.

Die bei der Rechnung gemachten Annahmen stimmen mit der Wirklichkeit nicht überein, zeigen aber, daß es nur darauf ankommt, die „Hauptverschiebung“ zu erfassen, da nur diese einen wesentlichen Einfluß auf den Niederhalterdruck hat.

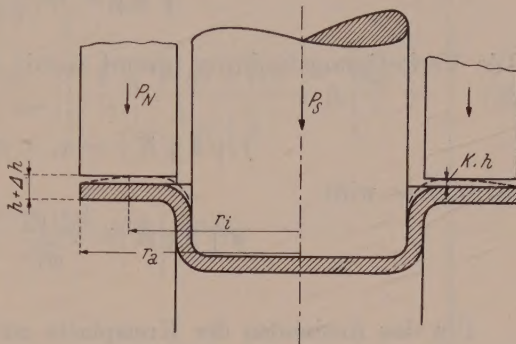


Abb. 3. Ziehvorgang.

III. Aufstellung der Beulbedingung.

Aus den Versuchen ergibt sich, daß der Niederhalter nur in dem Bereich $r_0 \leq r \leq r_i$ auf der Platine aufliegt (Abb. 3). Der Außenrand der Platine $r_i \leq r \leq r_a$ ist frei und bildet Falten, sofern die Spannungen σ_r und σ_φ einen kritischen Wert überschreiten. Nach dem Gesetz von Roß-Eichinger gilt nun

$$\sqrt{\Sigma(\sigma_i - \sigma_0)^2} = f \sqrt{\Sigma(\varepsilon_i - \varepsilon_0)^2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (19)$$

Setzt man den Niederhalter auf die Platine auf, so tritt außer der Radial- und Tangentialspannung noch eine Druckspannung auf. Durch diese Druckspannung wird σ_r und σ_φ im Bereich $r_0 \leq r \leq r_i$ herabgesetzt, so daß auf diese Weise die Faltenbildung verhindert werden kann.

Um den Bereich, auf dem der Niederhalter aufliegt, zu bestimmen, muß die „Beulbedingung“ für eine auf dem Innenrand $r = r_i$ eingespannte Kreisringplatte ($r_i \leq r \leq r_a$) aufgestellt werden. Bezeichnet man die Radialverschiebung auf dem Kreis $r = \bar{r}_0$ mit c , so ist [Teil I (66) und (67)]

$$\left. \begin{aligned} u_0(r, z) &= \frac{\sqrt{\bar{r}^2 + c} - \bar{r}}{(2\kappa + 1)^{1/4}} - \bar{r}, \\ \varepsilon_{r0} &= -\frac{1}{2} \frac{(2\kappa + 1 - \sqrt{2\kappa + 1}) r^2 + c}{\sqrt{2\kappa + 1} r^2 - c}, \\ \varepsilon_{\varphi 0} &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{2\kappa + 1} + \frac{c}{r^2} \right), \\ \varepsilon_{z0} &= K_0, \\ \kappa &= \frac{K_0}{1 - 2K_0}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Da nun $K_0 \ll 1$ ist, so kann in erster Annäherung gesetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{r0} &\approx -\frac{1}{2} \frac{\kappa r^2 + c}{r^2 - c}, \\ \varepsilon_{\varphi 0} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{c}{r^2} - \kappa \right), \\ \varepsilon_{z0} &= K_0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Vernachlässigt man noch $\frac{1}{3} c^2$ gegen c , so erhält man aus (21)

$$\sqrt{2} \sqrt{K} = \frac{c}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{(1 + \frac{5}{3} K_0) r^2 + c(1 + K_0)}}{r(r^2 - c)}. \quad (22)$$

Mit der Potenzreihenentwicklung des Wurzelausdruckes aus (22) wird in erster Annäherung

$$\sqrt{2} \sqrt{K} \approx \frac{|c|}{\sqrt{2}} \frac{r^2 + \frac{c}{2}}{r^2(r^2 - c)}. \quad (23)$$

Die Verfestigungsfunktion nimmt damit die Form

$$f(\sqrt{2} \sqrt{K}) = \alpha_i + \beta_i \frac{|c|}{\sqrt{2}} \frac{r^2 + \frac{c}{2}}{r^2(r^2 - c)} + \dots \quad (24)$$

an und es wird

$$g(\sqrt{2} \sqrt{K}) = \frac{\alpha_i \sqrt{2}}{|c|} \frac{r^2(r^2 - c)}{r^2 + \frac{c}{2}} + \beta_i + \dots$$

Um das Ausbeulen der Kreisplatte zu behandeln, macht man für die Dehnungen und Schiebungen den Näherungsansatz, wenn mit ξ die Ausbiegung der Platine bezeichnet wird:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= -\frac{1}{2} \frac{\kappa r^2 + c}{r^2 - c} + z \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2} \frac{c - \kappa r^2}{r^2} + z \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_z &= K_0, \\ \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi} &= z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Die Annahme, daß die Verfestigungsfunktion nur von den Grundverzerrungen ε_{r0} , $\varepsilon_{\varphi 0}$ und ε_{z0} abhängt, führt auf

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r' &= \left(-\frac{1}{2} \frac{\kappa r^2 + c}{r^2 - c} + z \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\alpha_i \sqrt{2}}{|c|} \frac{r^2(r^2 - c)}{r^2 + \frac{c}{2}} + \beta_i + \dots \right), \\ \sigma_\varphi' &= \left[\frac{1}{2} \frac{c - \kappa r^2}{r^2} + z \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \right] \left(\frac{\alpha_i \sqrt{2}}{|c|} \frac{r^2(r^2 - c)}{r^2 + \frac{c}{2}} + \beta_i + \dots \right), \\ \sigma_z' &= K_0 \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2(r^2 - c)}{r^2 + \frac{c}{2}} + \beta_i + \dots \right], \\ \tau_{r\varphi} &= z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2(r^2 - c)}{r^2 + \frac{c}{2}} + \beta_i + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Aus (26) ergibt sich der hydrostatische Spannungszustand zu

$$\sigma_0 = -\sigma_r' - \int \left[\frac{\sigma_r' - \sigma_\varphi'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right] dr + A_1. \quad (27)$$

Verwendet man bei der Reihenentwicklung der Verfestigungsfunktion nur die beiden ersten Glieder und wertet das Integral (27) aus, so wird

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_{r0} &= \frac{c}{|c|} (1 + \kappa) \frac{\alpha_i}{2\sqrt{2}} \ln \left| r^2 - \frac{c}{2} \right| - \frac{\alpha_i}{\sqrt{2}} \ln \frac{r^2}{r^2 - \frac{c}{2}} + \\
&\quad + \frac{c}{|c|} (1 + \kappa) \frac{\beta_i}{4} \ln \frac{r^2}{r^2 + |c|} + \frac{\beta_i}{4} \left[\ln \frac{r^2}{r^2 + |c|} + \frac{|c|}{r^2} \right] + A^*, \\
\sigma_{\varphi 0} &= \left(\frac{1}{2} \frac{c - \kappa r^2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\kappa r^2 + c}{r^2 - c} \right) \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2 (r^2 + |c|)}{r^2 - \frac{c}{2}} + \beta_i \right] + \sigma_{r0}, \\
\sigma_{z0} &= \left(K_0 + \frac{1}{2} \frac{\kappa r^2 + c}{r^2 - c} \right) \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2 (r^2 + |c|)}{r^2 - \frac{c}{2}} + \beta_i \right] + \sigma_{r0}, \\
\sigma_{r1} &= -z \int \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \xi}{\partial r \partial \varphi^2} \right] \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2 (r^2 + |c|)}{r^2 - \frac{c}{2}} + \beta_i \right] \frac{dr}{r} + \\
&\quad + \bar{A}_1, \\
\sigma_{\varphi 1} &= z \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{\partial^3 \xi}{\partial r^2} \right) \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2 (r^2 + |c|)}{r^2 - \frac{c}{2}} + \beta_i \right] + \sigma_{r1}, \\
\sigma_{z1} &= -z \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2 (r^2 + |c|)}{r^2 - \frac{c}{2}} + \beta_i \right] + \sigma_{r1}, \\
\tau_{r\varphi} &= z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2 (r^2 + |c|)}{r^2 - \frac{c}{2}} + \beta_i \right].
\end{aligned} \right\} \quad (28)$$

In (28) wurden mit σ_{i0} ($i = r, \varphi, z$) die durch den Grundverschiebungszustand hervorgerufenen Spannungen bezeichnet, während σ_{i1} die zusätzlichen Spannungen sind, die in der Platte Biegemomente hervorrufen.

Aus (28) ergibt sich, wenn h die Dicke der Platte ist, das Radialmoment

$$M_r = -\frac{h^3}{12} \int \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \xi}{\partial r \partial \varphi^2} \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2 (r^2 + |c|)}{r^2 - \frac{c}{2}} + \beta_i \right] \frac{dr}{r} + C, \quad (29)$$

das Tangentialmoment

$$M_\varphi = \frac{h^3}{12} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{\partial^3 \xi}{\partial r^2} \right) \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2 (r^2 + |c|)}{r^2 - \frac{c}{2}} + \beta_i \right] + M_r, \quad (30)$$

das Drillmoment

$$H_1 = \frac{h^3}{12} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2 (r^2 + |c|)}{r^2 - \frac{c}{2}} + \beta_i \right]. \quad (31)$$

Die in der Platte aufgespeicherte Biegearbeit ist

$$A_B = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} \left[M_r \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + M_\varphi \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + 2 H_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) \right] r dr d\varphi. \quad (32)$$

Geht man mit (29) bis (31) in (32) ein und setzt

$$\xi = \sin m \varphi \cdot \zeta(r), \quad (33)$$

so erhält man

$$A_B = \frac{\pi}{2} \int_{r_i}^{r_a} \left[M_r \left(\frac{d^2 \zeta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \zeta \right) \right] r dr + \frac{\pi h^3}{24} \int_{r_i}^{r_a} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \zeta \right)^2 - \frac{d^2 \zeta}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \zeta \right) + 2 \left(\frac{m}{r} \frac{d\zeta}{dr} - \frac{m}{r^2} \zeta \right)^2 \right] \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2 (r^2 + |c|)}{r^2 - \left| \frac{c}{2} \right|} + \beta_i \right] r dr. \quad (34)$$

Wie aus Versuchen bekannt ist, wird die Faltenzahl

$$m > 10.$$

Damit können in (34) die Glieder mit m^n , wobei $n \leq 2$ ist, vernachlässigt werden. Gl. (34) geht mit dieser Vereinfachung über in

$$A_B = -\pi m^4 \frac{h^3}{24} \int_{r_i}^{r_a} \left[M_r^* \frac{\zeta}{r^2} - \frac{\zeta^2}{r^4} \left(\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2 (r^2 + |c|)}{r^2 - \left| \frac{c}{2} \right|} + \beta_i \right) \right] r dr, \quad (35)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$M_r^* = \int \left[\frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} - \frac{2}{r^2} \zeta \right] \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2 (r^2 + |c|)}{r^2 - \left| \frac{c}{2} \right|} + \beta_i \right] \frac{dr}{r} + c. \quad (36)$$

Die in der Platte aufgespeicherte potentielle Energie ist

$$A_P = \frac{\pi h}{2} \int_{r_i}^{r_a} \left[\sigma_{r_0} \left(\frac{d\zeta}{dr} \right)^2 + \sigma_{\varphi_0} \left(\frac{m}{r} \zeta \right)^2 \right] r dr. \quad (37)$$

Berücksichtigt man in (37) nur die Glieder mit m^2 , dann erhält man

$$A_P = m^2 \frac{\pi h}{2} \int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\varphi_0} \frac{\zeta^2}{r} dr. \quad (38)$$

Die Minimalbedingung für die Formänderungsarbeit führt mit (35) und (38) auf

$$\frac{m^2 h^2}{12} \int_{r_i}^{r_a} \left[M_r^* \frac{\zeta}{r^2} - \frac{\zeta^2}{r^4} \left(\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} \frac{r^2 (r^2 + |c|)}{r^2 - \left| \frac{c}{2} \right|} + \beta_i \right) \right] r dr + \int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\varphi_0} \frac{\zeta^2}{r} dr = \text{Min}. \quad (39)$$

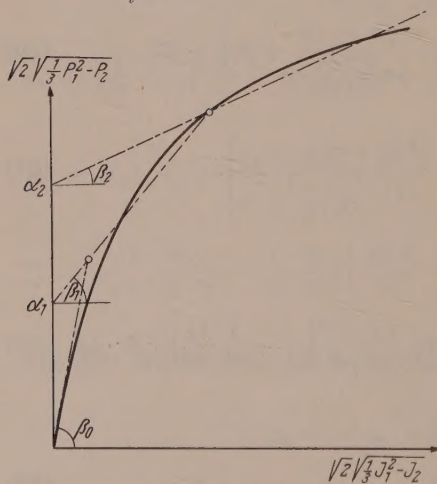


Abb. 4. Verfestigungsfunktion.

Aus (39) läßt sich näherungsweise mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens der Eigenwert berechnen. Hierbei ist zu beachten, daß die Integrationsgrenzen r_i und r_a ebenfalls noch von der kritischen Verschiebung c abhängen.

Wird die Verfestigungsfunktion entsprechend Abb. 4 angenommen und durch einen Polygonzug angenähert, so ergibt sich r_i aus der Gleichung

$$\frac{\sqrt{2}}{c} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \frac{r_i^2 (r_i^2 + |c|)}{r_i^2 - \left| \frac{c}{2} \right|} + \beta_i - \beta_{i+1} = 0. \quad (40)$$

Für r_a erhält man

$$r_a = \bar{r}_a - \frac{|c|}{2\bar{r}_a}, \quad (41)$$

wobei \bar{r}_a der ursprüngliche Außendurchmesser der Platine ist.

Um die Minimalbedingung (39) zu befriedigen, wird der eingliedrige Ansatz

$$\zeta = a_0 (r - r_i)^2 \quad (42)$$

verwendet, der die geometrischen Randbedingungen

$$r = r_i, \quad \zeta = \frac{d\zeta}{dr} = 0$$

erfüllt. Geht man mit (42) in (36) ein, so läßt sich das Integral auswerten. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{M_r^*}{a_0} = 2 \frac{\sqrt{2} \alpha_i}{|c|} & \left[r_i (r - r_a) + r_i \frac{3}{2} \sqrt{\frac{|c|}{2}} \ln \frac{\left(r + \sqrt{\frac{|c|}{2}}\right) \left(r_a - \sqrt{\frac{|c|}{2}}\right)}{\left(r - \sqrt{\frac{|c|}{2}}\right) \left(r_a + \sqrt{\frac{|c|}{2}}\right)} - \right. \\ & \left. - r_i^2 \left(\frac{3}{2} \ln \frac{r^2 - \frac{|c|}{2}}{r_a^2 - \frac{|c|}{2}} - \ln \frac{r^2}{r_a^2} \right) \right] + 2 \beta_i \left[2 r_i^2 \frac{r_a^2 - r^2}{r_a^2 r^2} - r_i \frac{r_a - r}{r_a r} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Die in (36) auftretende Konstante wird so ermittelt, daß die Randbedingung

$$r = r_a, \quad M_r = 0$$

erfüllt wird.

Mit den dimensionslosen Veränderlichen

$$\frac{r}{r_a} = x, \quad \frac{|c|}{r_a^2} = q, \quad \frac{r_i}{r_a} = x_i, \quad \frac{r_a}{r_a} = x_a$$

erhält man

$$\begin{aligned} \frac{M_r^*}{a_0} = 2 \frac{\sqrt{2} \alpha_i}{q} & \left[x_i \left(x - x_a + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{q}{2}} \ln \frac{\left(x + \sqrt{\frac{q}{2}}\right) \left(x_a - \sqrt{\frac{q}{2}}\right)}{\left(x - \sqrt{\frac{q}{2}}\right) \left(x_a + \sqrt{\frac{q}{2}}\right)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - x_i^2 \left(\frac{3}{2} \ln \frac{x^2 - \frac{q}{2}}{x_a^2 - \frac{q}{2}} - \ln \frac{x^2}{x_a^2} \right) \right] + 2 \beta_i \left(2 x_i^2 \frac{x_a^2 - x^2}{x^2 x_a^2} - x_i \frac{x_a - x}{x_a x} \right), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi 0} = \frac{\alpha_i}{\sqrt{2}} & \left[\frac{1 - \kappa}{2} \ln \frac{x^2 - \frac{q}{2}}{x_a^2 - \frac{q}{2}} - 2 \ln \frac{x}{x_a} - \frac{(2 + \kappa) x^2 + q}{x^2 - \frac{q}{2}} \right] + \\ & + \frac{\beta_i}{2} \left[\frac{\kappa}{2} \ln \frac{(x^2 + q) x_a^2}{(x_a^2 + q) x^2} + \frac{q}{2} \left(\frac{x_a^2 - x^2}{x^2 x_a^2} - 2 \frac{(2 + \kappa) x^2 + q}{x^2 (x^2 + q)} \right) \right], \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z_0} = \frac{\alpha_i}{\sqrt{2}} & \left[\frac{1 - \kappa}{2} \ln \frac{x^2 - \frac{q}{2}}{x_a^2 - \frac{q}{2}} - 2 \ln \frac{x}{x_a} + \frac{3 K_0 x^2 - 2 K_0 q - q}{x^2 - \frac{q}{2}} \right] + \\ & + \frac{\beta_i}{2} \left[\frac{1}{2} \kappa \ln \frac{(x^2 + q) x_a^2}{(x_a^2 + q) x^2} + q \frac{x_a^2 - x^2}{2 x^2 x_a^2} + \frac{3 K_0 x^2 - 2 K_0 q - q}{x^2 + q} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Die Minimalbedingung führt mit (44) bis (46) auf

$$\begin{aligned} \frac{m^2 h^2}{12} = - \frac{\int_{x_i}^{x_a} \sigma_{\varphi 0} (x - x_i)^4 \frac{dx}{x}}{\int_{x_i}^{x_a} \left\{ \frac{M_r^*}{a_0} \frac{(x - x_i)^2}{x^2} - \frac{(x - x_i)^4}{x^4} \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{q} \frac{x^2 (x^2 + q)}{x^2 - \frac{q}{2}} + \beta_i \right] \right\} x dx}, \end{aligned} \quad (47)$$

Um aus (47) den kleinsten Eigenwert zu ermitteln, wählt man ein bestimmtes q und wertet die Integrale bei festem α_i und β_i aus. Es ergibt sich dann ein Wert

$$\lambda = \frac{m^2 h^2}{12}.$$

Wird nun q variiert, so erhält man

$$\lambda = F(q). \quad (48)$$

Der Eigenwert ergibt sich dann aus der Bedingung

$$\frac{d\lambda}{dq} = \text{Min.} \quad (49)$$

Bei der Berechnung des Niederhalterdruckes ist zu beachten, daß auch die höheren Eigenwerte vermieden werden müssen.

IV. Berechnung des Niederhalterdruckes.

Mit Abb. 3 wird der Niederhalterdruck

$$p_N = \frac{2\bar{r}_a^2}{(\bar{r}_a^2 - \bar{r}_0^2)} \int_{x_0}^{x_i} \sigma_{20} x dx. \quad (50)$$

Die untere Integrationsgrenze x_0 ist fest, während x_i von dem jeweiligen Deformationszustand abhängt. Sie muß so ermittelt werden, daß der freie Außenrand der Platine ($x_i \leq x \leq x_a$) keine Falten bildet.

Wählt man die Verfestigungsfunktion $f(\sqrt{2}/K)$ entsprechend Abb. 4, so wird eine erste dimensionslose Verschiebungsgröße q so angenommen, daß der Außenrand der Platine gerade noch im rein elastischen Bereich der Verfestigungsfunktion verbleibt ($\alpha_0 = 0$). Ebenso soll bei diesem ersten Deformationsvorgang die Aufstauchung im elastischen Teil der Platine vernachlässigt werden. Damit wird

$$\frac{M_r^*}{\alpha_0} = 2\beta_0 \left[2x_i^2 \frac{x_a^2 - x^2}{x^2 x_a^2} - x_i \frac{x_a - x}{x_a x} \right], \quad (51)$$

$$\sigma_{\varphi 0} = \frac{\beta_0 q}{4} \left[\frac{x_a^2 - x^2}{x^2 x_a^2} - 2 \frac{2x^2 + q}{x^2 (x^2 + q)} \right], \quad (52)$$

$$\frac{m^2 h^2}{12} = \frac{1}{\int_{x_i}^1 \left\{ \frac{M_r^*}{\alpha_0} \frac{(x - x_i)^2}{x^2} - \frac{(x - x_i)^4}{x^4} \beta_i \right\} x dx} \cdot \bar{r}_a^2 \int_{x_i}^1 \sigma_{\varphi 0} (x - x_i)^4 \frac{dx}{x}. \quad (53)$$

Da es sich hierbei noch um sehr kleine Verschiebungen handelt, kann $x_a = 1$ gesetzt werden.

Die Rechnung wird nun wesentlich vereinfacht, wenn eine Grenzfaltenzahl m_G festgelegt wird, die gerade noch vermieden werden soll. Man wählt nun drei Werte q_1 , q_2 und q_3 und erhält für diese drei Werte aus (40) x_{i1} , x_{i2} und x_{i3} . Wertet man (53) numerisch aus, so erhält man m_1 , m_2 und m_3 .

Der zu m_G gehörige Wert q_G kann nun außerordentlich einfach mit Hilfe der projektiven Unterteilung gefunden werden (Abb. 5).

Man trägt auf einer Geraden G_1 die Werte m_1 , m_2 , m_3 linear ab und wählt einen Pol, zieht die Polstrahlen und paßt in das Strahlenbüschel eine Gerade G_2 so ein, daß q_1 auf den Polstrahl nach m_1 , q_2 auf den Polstrahl nach m_2 und q_3 auf den Polstrahl nach m_3 zu liegen kommt. Die Größen q_1 , q_2 und q_3 werden auf der Geraden G_2 ebenfalls linear aufgetragen. Der zu m_G gehörige Polstrahl schneidet dann auf der

Geraden G_2 den gesuchten Wert q_{G_I} aus. Mit diesem Wert q_{G_I} bestimmt man das dazugehörige x_{i_1} . Die in (46) auftretende Aufstauchung K_0 wird nun so bestimmt, daß die Bedingung

$$\sigma_{z0} = 0 \quad \text{für} \quad x = x_i$$

erfüllt wird. Dies führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_1}{2} \left[\frac{1}{2} \kappa_I \ln \frac{(x_i^2 + q_I) x_a^2}{(x_a^2 + q_I) x_i^2} + q_I \frac{x_a^2 - x_i^2}{2 x_i^2 x_a^2} + \frac{3 K_{0I} x_i - 2 q_I K_{0I} - q_I}{2 x_i^2 + q_I} \right] + \\ & + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1 - \kappa_I}{2} \ln \frac{x_i^2 - \frac{q_I}{2}}{x_a^2 - \frac{q_I}{2}} - 2 \ln \frac{x_i}{x_a} + \frac{3 K_{0I} x_i^2 - 2 q_I K_{0I} - q_I}{x_i^2 - \frac{q_I}{2}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

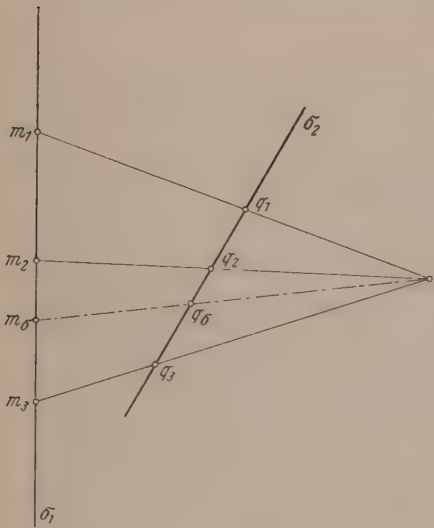
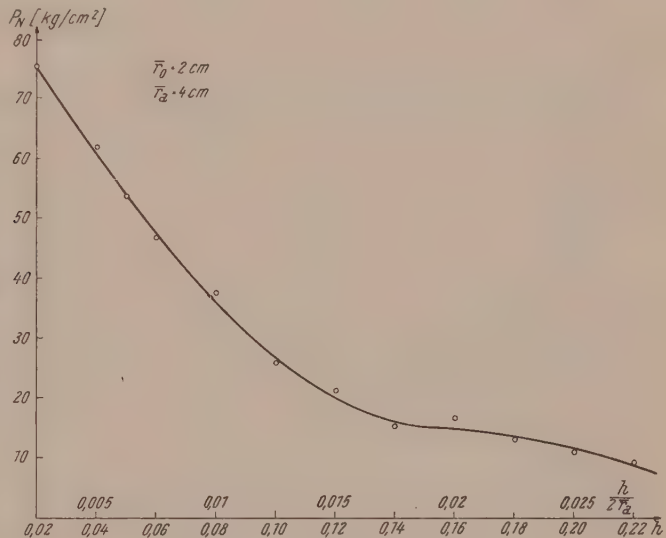
Abb. 5. Ermittlung von q_G .

Abb. 6. Niederhalterdruck.

Mit dem aus (54) bestimmten K_{0I} geht man in (46) ein und kann dann das Integral (50) auswerten.

Man nimmt nun die Verschiebungsgröße q beim zweiten Schritt so an, daß der Außenrand der Platine im Bereich x_1, β_1 der Verfestigungsfunktion bleibt und bestimmt auf dieselbe Weise wie beim ersten Schritt die kritische Verschiebung q_{II} . Die in (45) auftretende Aufstauchung K_0 wird in erster Annäherung $K_{0II} = K_{0I}$ gesetzt. Hierbei ist nun zu beachten, daß beim zweiten Schritt x_a noch von q abhängt.

Es ist nun möglich, daß bei fest angenommenem m_G und h

$$\lambda_{ci} > - \int_{x_i}^{x_a} \left\{ \frac{M_r^*}{a_0} \frac{(x - x_i)^2}{x^2} - \frac{(x - x_i)^4}{x^4} \left[\frac{\sqrt{2} \alpha_i}{q} \frac{x^2 (x^2 + q)}{x^2 - \frac{q}{2}} + \beta_i \right] \right\} x dx$$

ist. In diesem Falle bleibt die Platine noch stabil und könnte ohne Niederhalter eingezogen werden. Diese Erscheinung zeigt auch der Versuch bei großen Platinendicken. Die Rechnung wurde an einem Zahlenbeispiel durchgeführt.

V. Zahlenbeispiel.

Als Zahlenbeispiel wurde eine Platine mit den folgenden Abmessungen gewählt: $r_0 = 2$ cm, $r_a = 4$ cm, $0.02 \leq h \leq 0.24$ cm. Für M_s (63) wurde die Verfestigungsfunktion bestimmt und durch einen Polygonzug entsprechend Abb. 4 angenähert, wobei

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0, & \beta_0 &= 1.0 \cdot 10^6 \text{ [kg/cm}^2\text{]}, \\ \alpha_1 &= 4.0 \cdot 10^2, & \beta_1 &= 2.0 \cdot 10^4 \text{ [kg/cm}^2\text{]}, \\ \alpha_2 &= 17.31 \cdot 10^2, & \beta_2 &= 33.3 \cdot 10^2 \text{ [kg/cm}^2\text{]}\end{aligned}$$

angenommen wurde. Die Niederhalterdrücke sind dann für eine Grenzfaltenzahl

$$m_G = 32$$

ermittelt worden. Sie sind in Tab. 1 zusammengestellt und in Abb. 6 aufgetragen.

Tabelle 1. Niederhalterdruck ($\bar{r}_0 = 2$, $\bar{r}_a = 4$ [cm]).

h [cm]	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20
P_M [kg/cm ²] .	75.6	62.1	53.3	37.6	26.0	21.4	15.5	16.7	13.2	9.5
P_N [kg]	2848.6	2340	2008	1417	979.7	806.35	584.0	629.2	497.4	358.0

Es ist nun außerordentlich interessant, daß von $h = 0.15$ cm ab die Verkleinerung des Außenradius der Platine einen Einfluß auf den Niederhalterdruck gewinnt.

Die hier gewonnenen Ergebnisse stimmen mit den Versuchsergebnissen von Herrn Dr. Beißwenger, soweit sie mir bekanntgeworden sind, gut überein. Dies dürfte darauf zurückzuführen sein, daß der in Ziffer III verwendete Ritz-Ansatz zu große Werte liefert, die durch die Wahl einer Grenzfaltenzahl herabgemindert wurden. Um genaue Werte zu gewinnen, müßte die Rechnung mit den wirklich auftretenden Faltenzahlen, die nach Ziffer III ermittelt werden, nochmals durchgeführt werden. Da aber die an der Ziehkante auftretenden Biegespannungen nicht mitberücksichtigt wurden, dürfte eine Wiederholung keine wesentlichen Verbesserungen mehr bringen.

(Eingegangen am 4. November 1952.)

Die Biegefestigkeit von Balken auf zwei Stützen aus bildsamen, spröden und Verbundwerkstoffen.

Von K. Schaden, Wien.

Mit 6 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Für Werkstoffe mit beliebiger Spannungs-Dehnungslinie $\sigma = f(\epsilon)$ und für Verbundwerkstoffe (z. B. Stahlbeton) wird unter Benützung allgemeiner Beziehungen nach A. Nadai das Biegebruchmoment eines Balkens auf zwei Stützen mit I , T und Rechteckquerschnitt berechnet. Dabei ist der Bruch bzw. Fließbeginn durch $\frac{dM}{d\theta} = 0$ definiert, wobei θ den Neigungswinkel zweier Querschnitte bezeichnet. Der Bruchvorgang wird an einem unbewehrten und stark bewehrten Betonbalken eingehend erläutert, wobei aus den gemessenen Dehnungen am Biegezug- bzw. Biegedruckrand und dem Biegemoment die Spannungs-Dehnungsbeziehungen berechnet werden.

Summary. For building materials of an optional tension-elongation curve $\sigma = f(\epsilon)$ and for compound-type building materials, such as steel-reinforced concrete, the rupturing bending moment of a beam on two supports of T , Z , and rectangular cross-sections has been calculated, utilizing the general relations, as established by A. Nadai. The point of rupture, or the yield point are defined by the equation $\frac{dM}{d\theta} = 0$, whereby θ signifies the angle of inclination of two

cross-sections. The phenomenon of rupture is explained in detail with reference to a concrete beam, not reinforced, and a heavily reinforced concrete beam, the values of the elongations measured on the bending-tension edge and the bending-compression edge, and that of the bending moment being used for calculating the relations between tensions and elongations.

Résumé. Pour les matières de construction d'une courbe quelconque tension-élongation $\sigma = f(\varepsilon)$ et pour les matières composées, p. e. le béton armé, d'acier, le moment de flexion à rupture d'une poutre sur deux appuis à section en forme de I et de T , ainsi qu'à section rectangulaire, est calculé, en utilisant les relations générales selon A. Nadai. Le point de rupture ou bien la limite d'étrirage est défini par la fonction $\frac{dM}{d\vartheta} = 0$, ϑ désignant l'angle d'inclinaison de deux sections transversales. Le phénomène de la rupture est expliqué en détail par rapport à une poutre en béton non-armé et une poutre en béton fortement armé et les relations entre tensions et elongations sont calculées en se servant des elongations mesurées au bord de la flexion-tension et au bord de la flexion-compression, ainsi que du moment de flexion.

I. Einleitung.

Wir betrachten den Fall der reinen Biegung (ohne Querkraft) eines Balkens auf zwei Stützen aus sprödem oder bildsamem Werkstoff, dessen Spannungs-Dehnungs-linie nicht linear oder linear (Hook-sche Annahme) verläuft und die Beanspruchung im überelastischen oder plastischen Bereich liegt. Der Stab habe einen über die ganze Stablänge gleichbleibenden rechteckigen, T- oder I-förmigen Querschnitt und sei durch ein Biegemoment in der Hauptträgheits-ebene senkrecht zur Querschnittsbreite b (Abb. 1) belastet. Außerdem gelten folgende Voraussetzungen:

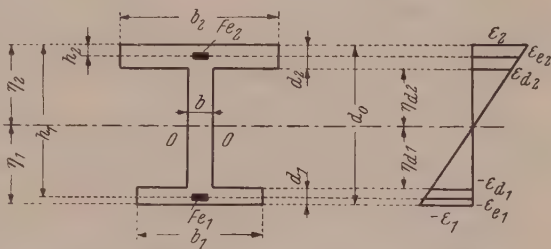


Abb. 1. Doppelt bewehrter Stahlbetonquerschnitt.

1. Die Bernoullische Hypothese, das heißt die Längen der Faserstücke zwischen zwei benachbarten Querschnitten verhalten sich wie deren Abstand vom Krümmungsmittelpunkt (Ebenbleiben der Querschnitte, was im folgenden nachgewiesen wird). Dadurch wird das Vorhandensein von Schubkräften im Querschnitt ausgeschlossen, was im Falle der reinen Biegung zutrifft. Nach K. Jäger kann die strenge Gültigkeit der Bernoullischen Hypothese bei reiner Biegung für ein beliebiges Formänderungsgesetz aus einem räumlichen Spannungszustand abgeleitet werden, wobei nur kleine Formänderungen vorausgesetzt sind¹. Durch sorgfältige Versuche von C. Bach² und A. Föppl (nach A. Probst³) mit Stoffen, deren Formänderungslinie nicht dem Hookschen Gesetz entspricht und durch Versuche von E. Meyer⁴ über die Durchbiegung von Stäben aus Flußeisen nach Überschreitung der Fließgrenze wurden diese Annahmen bis weit in den Fließbereich bestätigt. Aus den an Stahlbetonquerschnitten durchgeführten Messungen³ ist zu ersehen, daß im rissefreien Balkenbereich sich die Dehnungen genügend genau proportional zur Entfernung von der Nulllinie verhalten. Die Dehnungen am Zugrand nach dem Auftreten von Rissen wurden an einer Meßstrecke gemessen, innerhalb welcher

¹ K. Jäger: Zur Bernoullischen Hypothese bei nicht linearem Formänderungsgesetz. Österr. Bauzeitschrift 9, 135 (1947).

² C. Bach und R. Baumann: Elastizität und Festigkeit, 9. Aufl., S. 259. Berlin: Julius Springer. 1924.

³ A. Probst: Vorlesungen über Eisenbeton, Bd. I, S. 249. Berlin: Julius Springer. 1917, Siehe auch B. Kirsch und R. Saliger: Tetmajers Versuche, Armierter Beton 2 bis 4 (1911). — K. Hajnal-Konyi: Tests on concrete beams. Magazin of concrete Research 9, 113 (1952).

⁴ Z. Ver. dtsch. Ing. S. 197 (1908).

Risse vorhanden waren, wodurch das Ergebnis unsicher erscheint. Jedenfalls kann, wie die verglichenen Versuche in Abschn. E zeigen, zunächst das Ebenbleiben der Querschnitte auch für den gerissenen Stahlbetonbalken vorausgesetzt werden.

2. Der Einfluß der Querkontraktion kann vernachlässigt werden und die Querschnittsform bleibt unverändert. Aus den Ergebnissen der strengen St. Venant'schen und der daran anschließenden Biegetheorien ist zu ersehen, daß die oben getroffenen Annahmen der technischen Biegelehre für alle praktischen Fälle ausreichend sind⁵ (S. 177). Ausgenommen ist der Fall des Biegungsträgers mit hohem Steg oder breiten Flanschen (s. Abschn. D). Diese Ergebnisse sollen auch für den überelastischen Bereich als gültig vorausgesetzt sein.

3. Die Spannungs-Formänderungs-Beziehungen $\sigma = f(\varepsilon)$ in den Fasern des Querschnittes sind bei Biegung die gleichen, wie die bei einachsiger Zug- und Druckbeanspruchung. Die Zulässigkeit dieser Annahme kann nur durch Vergleich von Versuchen mit den theoretischen Biegewerten überprüft werden, da eine ausreichend genaue Methode der direkten Spannungsmessung nicht bekannt ist. Gemessen werden die einem Biegemoment entsprechenden Dehnungen am oberen und unteren Balkenrand. Die zugehörige Spannung wird aus den Formeln der Biegetheorie berechnet und die so erhaltene Formänderungslinie mit der bei einachsiger Beanspruchung erhaltenen, verglichen. Nach Abschn. C stimmen beide Formänderungslinien gut überein, so daß die oben getroffenen Annahmen als berechtigt erscheinen⁶.

Mit den Voraussetzungen 1 und 2 ergeben sich die folgenden Abhängigkeiten von Formänderung und Querschnittsgrößen: Die spezifische Dehnung in der Entfernung η von der Nulllinie ist mit den Bezeichnungen von A. Nadai⁷ bekanntlich

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\varrho}, \quad (1)$$

wenn ϱ den Krümmungshalbmesser der Nulllinie des verbogenen Balkens bezeichnet. Der Winkel ϑ , um den sich zwei Querschnitte im Abstand l gegeneinander neigen, ist bekanntlich⁷

$$2\vartheta = \frac{l}{\varrho}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{2\vartheta}{l}. \quad (2)$$

Bezeichnet d_0 die Höhe des Querschnittes und $\eta_{1,2}$ den Abstand der Nulllinie vom unteren bzw. oberen Rand, so gilt

$$\eta_1 + \eta_2 = d_0, \quad (3)$$

wobei nach Gl. (1)

$$\eta_1 = \varrho \varepsilon_1, \quad \eta_2 = \varrho \varepsilon_2. \quad (4)$$

Aus Gl. (3) und Gl. (4) wird

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{d_0} \quad (5)$$

⁵ J. W. Geckeler: Elastostatik. Handbuch der Physik, Bd. VI. Berlin: Julius Springer. 1928.

⁶ Für den Bruchzustand liegt nach Untersuchungen an Glasstäben von A. Smekal die Biegefestigkeit eines Zylinderstabes mit sprödem Stoffverhalten nicht unbeträchtlich höher als die Zugfestigkeit, da beim Biegestab nur etwa ein Viertel der Gesamtoberfläche eine bruchauslösende Inhomogenitätsstelle liefert, während beim gleichförmig gedehnten Zugstab diese Stelle von der Gesamtoberfläche geliefert wird. — Wieweit diese qualitative Feststellung mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Unterschiede in der Stoffgüte von Zug- und Biegeprobe quantitativ von Einfluß ist, könnte mit Hilfe der hier abgeleiteten Biegeformeln geklärt werden. Die quantitativen Vergleichswerte von A. Smekal beruhen offensichtlich auf elastizitätstheoretischer Grundlage. — Siehe A. Smekal: Zum Bruchvorgang bei sprödem Stoffverhalten unter ein- und mehrachsigen Beanspruchungen. Österr. Ingenieur-Arch. 7, 49 (1953).

⁷ A. Nadai: Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Berlin: Julius Springer. 1927. Theory of Flow and Fracture of Solids. New York: McGraw-Hill Book Company. 1950.

und mit Gl. (2)

$$\vartheta = \frac{l(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2d_0}. \quad (6)$$

Die Lage der Nulllinie ist dann nach Gl. (4) und (5)

$$\eta_1 = \frac{\varepsilon_1 d_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad \eta_2 = \frac{\varepsilon_2 d_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (7)$$

Das Gleichgewicht zwischen den Schnittkräften $M, Q = 0, N = 0$ und den Spannungen im Querschnitt $\sigma, \tau = 0$ verlangt

$$\int \sigma dq = 0, \quad (8)$$

$$\int \sigma \eta dq = M, \quad (9)$$

wobei in der Faser η des Querschnittselementes von der Breite $b = \Phi(\eta)$

$$dq = \Phi(\eta) d\eta \quad (10)$$

die Normalspannung $\sigma = f(\varepsilon)$ vorhanden ist. Mit Gl. (1) und (10) wird Gl. (8) und (9)

$$\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \Phi(\varrho \varepsilon) d\varepsilon = 0, \quad (8a)$$

$$M = \varrho^2 \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \Phi(\varrho \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon. \quad (9a)$$

Die klassische Biegetheorie berechnet auf Grund der Hookschen Annahme über die Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung die Randspannungen und bezeichnet für den Bruchzustand diese Spannungen als Biegefestigkeit, welche sich als querschnittsabhängig und verschieden von den im einachsigen Zug- und Druckversuch ermittelten Werten ergibt. Die Plastizitätstheorien nehmen eine zur einachsigen Spannungs-Dehnungslinie affine voll-⁸ oder teilplastische⁹ Spannungsverteilung über den Querschnitt an und berechnen aus dem Moment der inneren Kräfte das Bruch- bzw. Fließmoment. Der Hebelsarm der Innenkräfte wird dabei nach Versuchen festgelegt oder auf Grund einer angenäherten Spannungs-Dehnungslinie rechnerisch ermittelt. Die Größe der beim Bruch vorhandenen Randspannung und Randstauchung wird von den einzelnen Verfassern unterschiedlich angenommen. Im Gegensatz zu diesen Näherungsansätzen wird hier der Bruch bzw. Fließen dadurch definiert, daß eine Zunahme des Neigungswinkels zweier Querschnitte ϑ bei gleichbleibendem Moment erfolgt, das heißt $\frac{dM}{d\vartheta} = 0$, wobei in den Randfasern die Spannungs-Dehnungsbeziehungen des einachsigen Versuches gelten. Eine Behinderung der Formänderung wird als vernachlässigbar nachgewiesen. Einen guten Einblick in den Bruchvorgang ergibt die Untersuchung eines unbewehrten Betonbalkens (Abschn. C). Nach dem Erreichen der Bruchdehnung (gemessen im einachsigen Zugversuch bzw. berechnet aus dem Verdrehversuch) und Rißbildung am Balkenzugrand, steigt das Biegemoment noch um 17% bis zum Bruch. Beim ausreichend bewehrten Stahlbetonbalken erfolgt nach dem Erreichen der Prismenfestigkeit im Druckrand ebenfalls noch eine geringe Zunahme des Biegemomentes bis zum Bruch. Wird die Stauchung am Druckrand nach dem Erreichen der Prismenfestigkeit bzw. der Bruchstauchung bis zum Eintritt

⁸ Zum Beispiel W. Prager: Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. **83**, 95 (1933).

⁹ F. Fritsche: Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Formänderungsvermögens. Bau-Ing. **11**, 851 (1930). — Zum Beispiel K. Haberstöck: Die n -freien Berechnungsweisen. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H. 103. Berlin: Wilhelm Ernst und Sohn. 1951.

des Bruches weitergemessen, so ergeben sich die vielfach gemessenen hohen Werte der „Biegedruckstauchung“, die jedoch nur fiktive Bedeutung haben. Eine eingehende Untersuchung des Biegefließvorganges an Versuchen mit Balken aus Stahl mit ausgeprägter Fließgrenze ist hier nicht möglich, da die bekanntgewordenen Versuche große Streuungen im Werkstoff des Biegebalkens und der Zug- und Druckversuche aufweisen bzw. ausreichende Versuchswerte nicht angegeben sind. Jedenfalls tritt auch beim Stahlbalken nach dem Erreichen der Fließgrenze an den Rändern noch eine Zunahme des Biegemomentes bis zum Fließmoment ein, wodurch das in der Literatur erwähnte Auftreten von Fließfiguren vor dem Erreichen des Fließmomentes geklärt erscheint.

Bei Verwendung von Gleichungen nach A. Nadai wird aus dem Biegeversuch eines stark bewehrten Stahlbetonbalkens die Druck-Stauchungslinie des Betons berechnet, welche mit dem Druckversuch an einem Prisma übereinstimmt. Ebenso zeigt die aus dem Biegemoment und den Dehnungen am Zugrand eines unbewehrten Betonbalkens berechnete Spannungs-Dehnungslinie gute Übereinstimmung mit den im Zugversuch ermittelten Werten.

Mit den allgemeinen Beziehungen von A. Nadai wird im Abschn. B die Bruchbedingung $\frac{dM}{d\vartheta} = 0$ für den Rechteckquerschnitt abgeleitet. Das Bruchmoment des doppelt bewehrten I-Stahlbetonquerschnittes ergibt sich nach Abschn. D. Durch Nullsetzung der einzelnen Querschnittsgrößen folgt das Bruchmoment für die daraus abgeleiteten bewehrten und unbewehrten Querschnittsformen aus beliebigem Werkstoff des Balkens und der Bewehrung, sofern die oben getroffenen Voraussetzungen zutreffen. Für den Stahlbetonquerschnitt kann durch Berücksichtigung der Betonzugfestigkeit $\sigma_1 = k_1 \sigma_z$ oder deren Nullsetzung $\sigma_1 = 0$ die Mitwirkung der Betonzugzone berücksichtigt oder ausgeschaltet werden. Der Faktor k berücksichtigt die Eigenspannungen aus Schwinden und Kriechen, die auch die Festigkeit am Druckrand $\sigma_2 = k_2 \sigma_P$ und die Spannung in der Bewehrung beeinflussen. In Abschn. E sind die theoretischen Werte und die Ergebnisse von Versuchen mit schwach und stark bewehrten Stahlbetonbalken verglichen, wobei der Unterschied zwischen dem berechneten und gemessenen Bruchmoment höchstens 9% beträgt.

II. Rechteckquerschnitt.

Es soll zunächst die Bruchbedingung des Biegebalkens $\frac{dM}{d\vartheta} = 0$ am Rechteckquerschnitt näher erläutert werden. Hier ist $b = \Phi(\eta) = \text{konst.}$ Wird nach A. Nadai⁷ die Integralbedingung Gl. (8a) und (9a) nach ϑ differenziert, so wird

$$\sigma_2 d\varepsilon_2 = \sigma_1 d\varepsilon_1 \quad (11)$$

und

$$b d_0^2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{1}{\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (M \vartheta^2). \quad (12)$$

Mit

$$F_1 = \int_{-\varepsilon_1}^0 f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad F_2 = \int_0^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (13)$$

lautet die Bedingung Gl. (8a)

$$F_1 = F_2. \quad (14)$$

Wird für ein bestimmtes Formänderungsgesetz $\sigma = f(\varepsilon)$ die Summenlinie der Flächeninhalte aufgetragen (Abb. 2), so entspricht nach Gl. (14) und Abb. 2 jeder Spannung am Zugrand $-\sigma_1$ eine Spannung σ_2 am Druckrand. Nach Gl. (8) muß auch bei einer Belastungszunahme des Stabes die Zunahme der Flächeninhalte $dF_1 = \sigma_1 d\varepsilon_1$ und $dF_2 = \sigma_2 d\varepsilon_2$ entgegengesetzt gleich groß sein. Gl. (12) gibt die Abhängigkeit der

Querschnittsabmessungen, Randspannungen und Neigungswinkel ϑ zweier Querschnitte vom Biegemoment an.

Die Erschöpfung der Tragfähigkeit eines Balkens soll dadurch gekennzeichnet sein, daß eine Zunahme der Formänderung und damit des Winkels ϑ bei gleichbleibender Belastung erfolgt, das heißt $\frac{dM}{d\vartheta} = 0$. Diese Bedingung führt bei spröden Stoffen zum Bruch, während sich Balken aus bildsamen Stoffen dabei weitgehend verformen und so als Tragelement unbrauchbar werden. Die Voraussetzungen nach Abschn. A treffen für die bis zum Bruch der spröden Stoffe geringen Formänderungen noch zu. Bildsame Stoffe werden je nach der Größe ihrer Formänderungsfähigkeit, Abweichungen von den theoretischen Werten zeigen. Mit $\frac{dM}{d\vartheta} = 0$ wird Gl. (12) zur Bruch- bzw. Fließbedingung

$$M_b = \frac{b d^2}{2} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad (15)$$

wobei σ_1 und σ_2 nach Gl. (14) bzw. Abb. 2 einander entsprechen müssen.

Bei für Zug und Druck gleichartiger Formänderungslinie wird $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ und in Abb. 1 $F_1 \equiv F_2$, so daß Gl. (15)

$$M = \frac{b d^2}{4} \sigma \quad (16)$$

die bekannte Formel für plastische Biegung wird, die sich dort aus der Annahme einer vollplastischen Spannungsverteilung über den Querschnitt ergibt.

III. Ermittlung der Formänderungslinie in den Randfasern eines Rechteckquerschnittes.

Nach A. Nadai⁷ kann die Formänderungslinie aus einem Biegeversuch berechnet werden. Aus den gemessenen Werten M , ε_1 , ε_2 ist nach Gl. (6) der Winkel ϑ und damit aus der Linie $\varepsilon = f(\vartheta)$ auch $\frac{d\varepsilon}{d\vartheta}$ bekannt. Aus Gl. (11) ergibt sich das Verhältnis $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ und damit aus Gl. (12) die den Randdehnungen entsprechenden Randspannungen. Ähnliche Beziehungen hat H. Herbert abgeleitet und aus dem Biegeversuch mit gußeisernen Stäben die Formänderungslinien des Biegezug- und Biegedruckrandes berechnet¹⁰, deren Übereinstimmung mit den im einachsigen Zug- und Druckversuch ermittelten als befriedigend bezeichnet wird. Für Stahl mit ausgeprägter Fließgrenze wurden ähnliche Untersuchungen von E. Chwalla¹¹ durchgeführt. Hier soll noch ein Rechteckbalken aus Beton untersucht werden. In den Versuchen von Bach-Graf 1907¹² wurde der unbewehrte Balken Nr. 66 durch zwei Einzelasten auf reine Biegung in der bekannten Art stufenweise beansprucht. In den einzelnen Laststufen wurden die Formänderungen am Zug- und Druckrand auf einer Meßstrecke von 70 cm gemessen. In Tab. 1 sind aus Abb. 3 nach der oben erläuterten Methode einzelne Stufen berechnet und die Formänderungslinien für den Zug- und Druckrand in Abb. 4a aufgetragen.

¹⁰ H. Herbert: Über den Zusammenhang der Biegeelastizität des Gußeisens mit seiner Zug- und Druckelastizität. Mitt. Forsch. Ing.-Wes., H. 89. Berlin: Julius Springer. 1910.

¹¹ E. Chwalla: Über die Erhöhung der Fließgrenze in prismatischen Balken aus Baustahl. Stahlbau 6, 149 (1933) und Zugschrift an die Schriftleitung. Stahlbau 1, 8 (1936).

¹² C. Bach: Versuche mit Eisenbetonbalken, 2. Teil. Mitt. Forsch. Ing.-Wes., H. 45—47. Berlin: Julius Springer. 1907.

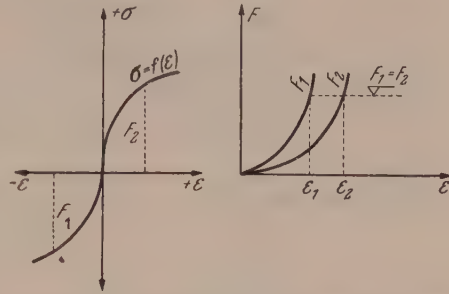


Abb. 2. Spannungs-Dehnungslinie und deren Flächeninhalt.

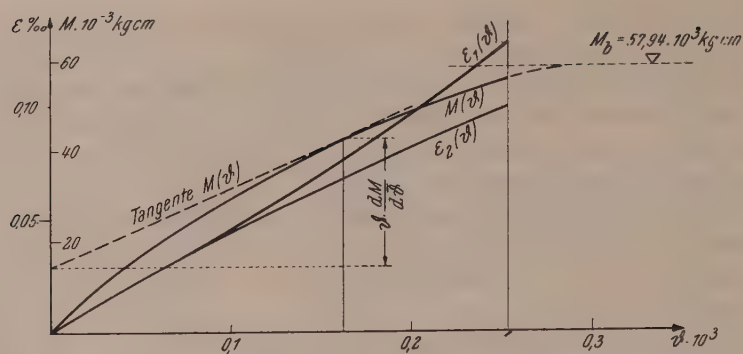


Abb. 3. Randdehnungen und Biegemoment eines Betonbalkens in Abhängigkeit vom Neigungswinkel θ zweier Querschnitte.

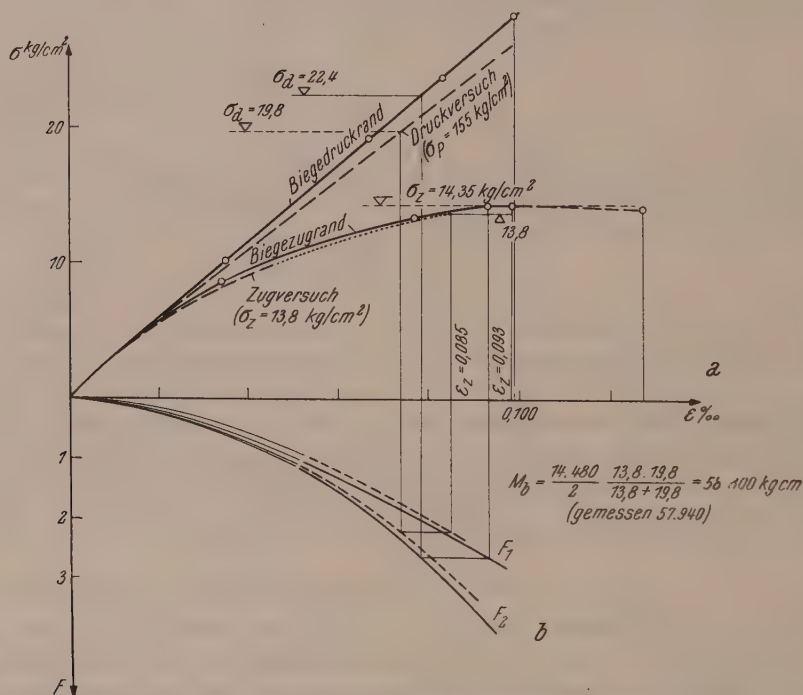


Abb. 4. Spannungs-Dehnungslinien an den Rändern eines Biegebalkens aus Beton.

Tabelle 1. Betonrechteckquerschnitt:

$d = 31.00$ cm, $b = 15.07$ cm, $l = 69.9$ cm, $M_g = 5340$ kgcm, $bd^2 = 14480$ cm³.

M kg cm	$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ ε_1^{13}	$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ ε_2^{13}	θ 10 ³	$\frac{d\varepsilon_1}{d\theta}$	$\frac{d\varepsilon_2}{d\theta}$	$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$	$\frac{dM}{d\theta}$ θ	σ_1 kg/cm ²	σ_2 kg/cm ²
Eigengew.	0.007	0.007	—	—	—	—	—	—	—
24040	0.034	0.035	0.077	0.471	0.430	0.912	18.60	8.78	9.62
42800	0.077	0.067	0.162	0.528	0.358	0.680	28.00	13.18	19.40
49340 ¹⁴	0.098	0.083	0.204	0.549	0.338	0.618	30.00	14.35	23.30
55340	0.127	0.099	0.254	0.610	0.294	0.483	23.50	14.10	28.60

¹³ Die Dehnung infolge des Eigengewichtes wurde auf elastizitätstheoretischer Grundlage berechnet.

¹⁴ Wasserflecke an der Balkenunterseite.

Die dort eingetragene Spannungs-Dehnungslinie des Zugversuches stimmt mit der aus dem Biegeversuch berechneten nahezu überein. Die Spannungs-Stauchungslinie des Druckversuches weicht bis zu 8·6% von der aus dem Biegeversuch berechneten ab. Wird auf Grund der im Zug- und Druckversuch ermittelten Formänderungslinie¹⁵ nach Abb. 4b und Gl. (15) das Bruchmoment berechnet, so ist

$$M_b = \frac{14\,480}{2} \frac{13\,8 \cdot 19\,8}{13\,8 + 19\,8} = 58\,800 \text{ kg cm}$$

gegenüber dem gemessenen Bruchmoment von 57·940 kgcm (Fehler 1·5%). Dazu ist folgendes zu bemerken: Nach den Beobachtungen von Bach-Graf, Turneaus¹² und anderen Verfassern treten nach dem Erreichen der Bruchdehnung bzw. Zugfestigkeit des Betons am Zugrand (Rißbildung) an der Balkenunterseite Wasserflecke auf. Die hier gemessene Bruchdehnung nach dem Auftreten der ersten Wasserflecke beträgt 0·09% gegen 0·08% beim Zugversuch. Die zugehörige Betonstauchung an der Balkenoberseite wurde mit 0·08% gemessen, gegen 0·073% für die nach Abb. 3b aus dem Druckversuch entnommene Spannung $\sigma_a = 19\,8 \text{ kg/cm}^2$. Diese Vergleiche zeigen, daß das Bruchmoment auf Grund der im Zug- und Druckversuch ermittelten Formänderungslinien sehr zutreffend berechnet wurde. Dazu sind keinerlei Messungen des Biegeversuches notwendig. Dagegen zeigen die mit Hilfe der gemessenen Dehnungen am Zug- und Druckrand berechneten Formänderungslinien Abweichungen von denjenigen des Zug- und Druckversuches. Eine Erklärung dafür wäre, neben der bekannten Unsicherheit von Dehnungsmessungen, die Anordnung der Meßstrecken, die bei einer Balkenhöhe von 30 cm nur 15 cm von der Einzellast entfernt beginnen, wodurch insbesondere die Druckmeßstrecke kaum gleichmäßig beansprucht ist.

Der Bruchvorgang ist folgender: Nach dem ersten Riß des Betons an der Balkenunterseite schreitet die Rißbildung ins Innere des Balkens bis zum Bruch fort. Dabei steigt das Biegemoment vom Rißmoment auf das Bruchmoment um 17·4% an. Dies steht in Übereinstimmung mit der in der Literatur erwähnten Feststellung von Fließlinien vor dem Erreichen des Fließmomentes in auf Biegung beanspruchten Stahlträgern. Dazu sei ausdrücklich vermerkt, daß hier keinerlei Annahme über die Spannungsverteilung im Bruchzustand vorausgesetzt ist.

Es soll noch die Spannungs-Stauchungslinie des Druckrandes eines stark bewehrten Stahlbetonbalkens aus einem Biegeversuch ermittelt werden.

Es soll noch die Spannungs-Stauchungslinie des Druckrandes eines stark bewehrten Stahlbetonbalkens aus einem Biegeversuch ermittelt werden.

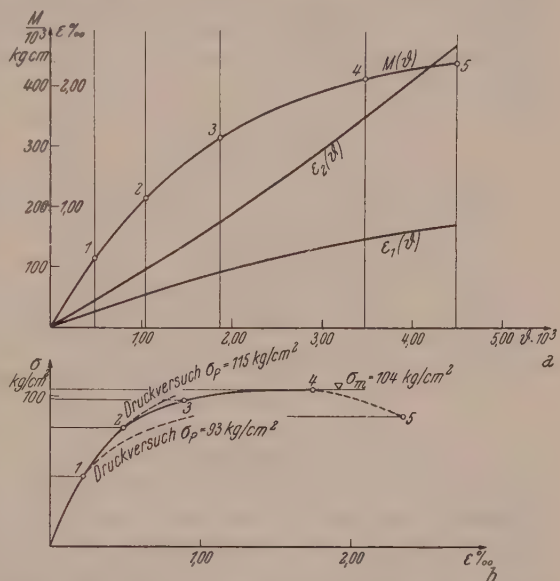


Abb. 5. Spannungs-Stauchungslinie des Druckrandes eines Stahlbetonbalkens.

¹⁵ Im Zugversuch wurde die Messung der Dehnungen etwa bis zur halben Bruchdehnung durchgeführt. Die Abhängigkeit der Bruchdehnung von der Zugfestigkeit des Betons wurde vom Verfasser aus Drehversuchen berechnet. Daraus ist der hier eingesetzte Wert $\varepsilon_z = 0\,085\%$ in Übereinstimmung mit der Messung Bachs (s. Anm. 12, S. 99) für $\sigma_z = 13\,8 \text{ kg/cm}^2$ entnommen. Siehe K. Schaden: Die Riß- und Bruchlast des auf reine Verdrehung beanspruchten Stahl- und Spannbetons. Österr. Bauzeitschrift, Jg. 1953.

Von den Versuchen Bach-Graf 1910¹⁶ sind aus der Reihe 2 für den Balken Nr. 328 die gemessenen Randdehnungen ε_1 , ε_2 in Tab. 2 eingetragen. Dort sind, wie oben nach Abb. 5a, die Randspannungen σ_1 , σ_2 berechnet. Die Zugrandspannung ist jetzt infolge der Eiseneinlagen und Rißbildung im Beton eine fiktive Spannung, die hier zunächst nicht weiter untersucht wird. In der Abb. 5b ist die Beziehung $\sigma_2 = f(\varepsilon_2)$ aufgetragen und mit der im Druckversuch ermittelten Formänderungslinie verglichen. Die Übereinstimmung ist ausreichend¹⁷, wobei zu bemerken ist, daß wie beim unbewehrten Betonbalken eine ungleichmäßig beanspruchte Druckstrecke gemessen wurde (Meßstrecke 70 cm, Entfernung der Einzellasten 100 cm). Der Bruchvorgang ist hier folgender: Nach der Rißbildung am Zugrand wird das Biegemoment von der Bewehrung und der Betondruckzone aufgenommen. Nach Erreichen der Prismenfestigkeit am Biegedruckrand (angenähert Punkt 4 der Abb. 5) schreitet der Bruch des Betons ins Balkeninnere bis zur Erschöpfung der Tragfähigkeit des Balkens (Punkt 5) fort.

Tabelle 2. Stahlbeton-Rechteckquerschnitt;

$d = 25.1$ cm, $b = 18.2$ cm, $l = 70$ cm, $\sigma_P = i. M. 105$ kg/cm², $M_g = 14400$ kgcm, $bd^3 = 11460$ cm³.

$M \cdot 10^{-3}$ kg/cm	$\frac{0}{100}$ ε_1	$\frac{0}{100}$ ε_2	$\vartheta \cdot 10^3$	$\frac{d\varepsilon_1}{d\vartheta}$	$\frac{d\varepsilon_2}{d\vartheta}$	$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$	$\frac{dM}{d\vartheta} \cdot \vartheta$	σ_1 kg/cm ²	σ_2 kg/cm ²
14.4 ¹⁸	0.029	0.029	—	—	—	—	—	—	—
114.4	0.132	0.213	0.482	0.273	0.440	1.62	100	74.6	46.2
214.4	0.278	0.478	1.058	0.246	0.458	1.86	150	144.0	78.8
314.4	0.465	0.885	1.885	0.206	0.498	2.42	170	242.0	98.0
414.4	0.739	1.749	3.490	0.137	0.572	4.20	132	419.0	104.0
439.4	0.861	2.349	4.490	0.083	0.615	7.40	0	688.0	86.5

Wie auch aus Abschn. E zu ersehen, ist der Ansatz der Prismenfestigkeit am Druckrand zutreffend. Eine „Stützwirkung“ ist im Rahmen der erreichbaren Versuchsgenauigkeit nicht von Bedeutung, da beim Bruch bereits in einem breiteren Randstreifen die Prismenfestigkeit erreicht ist und somit $\sigma_2 = \sigma_P$ gilt. Das gleiche dürfte für Metalle gelten, wo auch die Festigkeit des Werkstoffes in der Biegeprobe verschieden von der in der Zug- bzw. Druckprobe ist (20% Unterschied bei den Versuchen von E. Chwalla mit Baustahl¹¹). Die Bruchstauchung am Druckrand steht in Übereinstimmung mit den Prismenversuchen¹⁹ und beträgt beim minderfesten Beton etwa 1.8‰, beim höher- und hochwertigen Beton etwa 2‰. Gemessene höhere Werte am Biegedruckrand schließen bereits die Verformungen des Druckrandes nach der Erschöpfung seiner Tragfähigkeit (Prismenfestigkeit) ein und haben daher nur scheinbare Bedeutung.

IV. Der I-Querschnitt aus Verbundwerkstoff.

Die Voraussetzung des Abschn. A, 2 ist nur dann berechtigt, wenn die Deformationen des Trägers gering sind, was bei spröden Stoffen, insbesondere Beton im allgemeinen zutrifft und auch für die im Bauwesen zugelassenen Durchbiegungen

¹⁶ C. Bach und O. Graf: Versuche mit Eisenbetonbalken. Mitt. Forsch. Ing.-Wes., H. 90—92. Berlin: Julius Springer. 1910.

¹⁷ Die Formänderungslinie $\sigma_2 = f(\varepsilon_2)$ wurde aus Biegeversuchen unter der in der Theorie des Stahlbetons üblichen Annahme einer gerissenen Betonzugzone und einer zur einachsigen Druckstauchungslinie affinen Druckspannungsverteilung im Querschnitt berechnet. Damit ergeben sich gegen die Bruchgrenze stark abfallende Formänderungslinien, die beim ebenen Spannungszustand durchaus unwahrscheinlich sind. Siehe z. B. H. Hamann: Berechnung der Druckspannungskurve im Stahlbetonbiegequerschnitt: Schweiz. Bau-Ztg. 44, 629 (1952).

¹⁸ Eigengewicht, ε berechnet auf elastizitätstheoretischer Grundlage mit $E_B = 260 \cdot 10^3$.

¹⁹ K. Schaden: Die Verdrehungsfestigkeit des Betons. Österr. Ingenieur-Arch. 6, 12 (1951).

angenommen werden kann. Bei hohen Biegungsträgern mit breiten Flanschen aus bildsamen Stoffen mit größerer Formänderung entsteht im Steg eine Radialkraft und zusätzliche Formänderungen in den Flanschen²⁰, wodurch die nachfolgenden Formeln nur angenähert gelten.

So wie im Abschn. B für den Rechteckquerschnitt, wird nachfolgend für den I-Querschnitt, der durch Einlagen im oberen und unteren Stegrand verstärkt ist (z. B. ein doppelt bewehrter Stahlbetonquerschnitt), nach Abb. 1 das Bruchmoment berechnet. Hier ist die Querschnittsbreite $b = \Phi(\eta)$ nur streckenweise konstant. Sie springt nach Abb. 5 bei η_d von b_0 auf b_1 bzw. b_2 . Die Integration von Gl. (8a) bzw. (9a) kann daher in drei Bereichen durchgeführt werden. Damit lautet die Bedingung Gl. (8a)

$$\int_{-\varepsilon_1}^{-\varepsilon_{d_1}} b_1 f(\varepsilon) d\varepsilon + \int_{-\varepsilon_{d_1}}^{\varepsilon_{d_2}} b_0 f(\varepsilon) d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{d_2}}^{\varepsilon_2} b_2 f(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{F_{e_1} f(-\varepsilon_{e_1})}{\varrho} + \frac{F_{e_2} f(\varepsilon_{e_2})}{\varrho} = 0. \quad (17)$$

Mit

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\varepsilon_1}^{-\varepsilon_{d_1}} \frac{b_1}{b_0} f(\varepsilon) d\varepsilon &= -F_1', & \int_{-\varepsilon_{d_1}}^0 f(\varepsilon) d\varepsilon &= -F_1'', & \int_0^{\varepsilon_{d_2}} f(\varepsilon) d\varepsilon &= F_2', & \int_{\varepsilon_{d_2}}^{\varepsilon_2} \frac{b_2}{b_0} f(\varepsilon) d\varepsilon &= F_2'', \\ \frac{F_{e_1} f(-\varepsilon_{e_1})}{b_0 \varrho} &= -\frac{F_{e_1} \sigma_{e_1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{b_0 d_0} = F^e, & \frac{F_{e_2} f(\varepsilon_{e_2})}{b_0 \varrho} &= \frac{F_{e_2} \sigma_{e_2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{b_0 d_0} = F^{e'}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -f(-\varepsilon_1), & \sigma_{d_1} &= -f(-\varepsilon_{d_1}), & \sigma_{e_1} &= -f(-\varepsilon_{e_1}), \\ \sigma_2 &= f(\varepsilon_2), & \sigma_{d_2} &= f(\varepsilon_{d_2}), & \sigma_{e_2} &= f(\varepsilon_{e_2}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

bezeichnen, erscheint die Bedingung $\Sigma H = 0$ nach Gl. (8) in der Form

$$-F_1' - F_1'' + F_2' + F_2'' - F^e + F^{e'} = 0. \quad (20)$$

Vor Behandlung der Bedingung $\Sigma M = 0$ Gl. (9) sollen die dazu erforderlichen Formänderungsbeziehungen erledigt werden. Aus der Proportionalität zwischen Dehnungen und Nulllinienabstand ist nach Abb. 1

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{d_0} &= \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_{d_2}}{d_2} = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_{d_1}}{d_0 - d_1} = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_{e_1}}{h_1} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_{e_2}}{h_2}, \\ \text{woraus} \quad \varepsilon_{d_2} &= \varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{d_2}{d_0}, & \varepsilon_{e_1} &= \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) h_1}{d_0} - \varepsilon_2, \\ \varepsilon_{d_1} &= \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) (d_0 - d_1)}{d_0} - \varepsilon_2, & \varepsilon_{e_2} &= \varepsilon_2 - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) h_2}{d_0}. \end{aligned} \quad (21)$$

Nach Gl. (21) und Gl. (6) wird

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{d_1} + \varepsilon_2 &= (d_0 - d_1) \frac{2\vartheta}{l}, & \varepsilon_2 - \varepsilon_{e_1} &= \frac{2\vartheta}{l} h_1 - 2\varepsilon_{e_1}, & \varepsilon_{d_2} - \varepsilon_2 &= -d_2 \frac{2\vartheta}{l}, \\ \varepsilon_{d_2} - \varepsilon_2 &= -\frac{2\vartheta}{l} d_2, & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \frac{2\vartheta}{l} d_0, & \varepsilon_2 - \varepsilon_{e_2} &= \frac{2\vartheta}{l} h_2, & \varepsilon_2 + \varepsilon_{e_1} &= \frac{2\vartheta}{l} h_1. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Durch Differentiation nach $d\vartheta$ wird aus Gl. (4), (21) und (22)

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_{d_1} &= (d_0 - d_1) \frac{2}{l} - d\varepsilon_2, & d\varepsilon_{e_2} &= d\varepsilon_2 - \frac{2}{l} h_2, & d\varepsilon_{d_2} &= d\varepsilon_2 - \frac{2}{l} d_2, \\ d\varepsilon_2 &= \frac{2}{l} h_2 + d\varepsilon_{e_2}, & d\varepsilon_1 &= \frac{2d_0}{l} - d\varepsilon_2, \\ -\frac{2h_2}{l} - d\varepsilon_{e_2} &= d\varepsilon_2 - \frac{4}{l} h_1 + 2d\varepsilon_2, & d\varepsilon_{e_1} &= \frac{2}{l} h_1 - d\varepsilon_2. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

²⁰ I. Kober: Stegbeanspruchung hoher Biegungsträger. Abhandlg. aus dem Aerodynamischen Institut a. d. T. H. Aachen, H. 7, S. 34. Berlin: Julius-Springer. 1927.

Wird noch Gl. (21) nach ϑ differenziert und durch b_0 dividiert, so ist mit Gl. (2) nach Umformung und Berücksichtigung von Gl. (19)

$$\begin{aligned} \frac{b_2}{b_0} \sigma_2 d\varepsilon_2 = & -\frac{b_1}{b_0} (\sigma_{d_1} d\varepsilon_{d_1} - \sigma_1 d\varepsilon_1) + \sigma_{d_1} d\varepsilon_{d_1} - \sigma_{d_2} d\varepsilon_{d_2} + \frac{b_2}{b_0} \sigma_{d_2} d\varepsilon_{d_2} + \\ & + \frac{2F_{e_1}}{b_0 l} (\sigma_{e_1} + \vartheta d\sigma_{e_1}) - \frac{2F_{e_2}}{b_0 l} (\sigma_{e_2} + \vartheta d\sigma_{e_2}). \end{aligned} \quad (24)$$

Die Summe der Momente um die neutrale Achse Gl. (9a) wird

$$\int_{-\varepsilon_1}^{-\varepsilon_{d_1}} f(\varepsilon) \varepsilon b_1 \varrho^2 d\varepsilon + \int_{-\varepsilon_{d_1}}^{\varepsilon_{d_2}} f(\varepsilon) \varepsilon b_0 \varrho^2 d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{d_2}}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \varepsilon b_2 \varrho^2 d\varepsilon + F_{e_1} \sigma_{e_1} \varepsilon_{e_1} \varrho + F_{e_2} \sigma_{e_2} \varepsilon_{e_2} \varrho = M, \quad (25)$$

oder mit Gl. (2)

$$M \vartheta^2 = \frac{l^2}{4} \left\{ b_1 \int_{-\varepsilon_1}^{-\varepsilon_{d_1}} f(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + b_0 \int_{-\varepsilon_{d_1}}^{\varepsilon_{d_2}} f(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + b_2 \int_{\varepsilon_{d_2}}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + \frac{2F_{e_1}}{l} \vartheta \sigma_{e_1} \varepsilon_{e_1} + \frac{2F_{e_2}}{l} \vartheta \sigma_{e_2} \varepsilon_{e_2} \right\}. \quad (26)$$

Durch Differentiation nach $d\vartheta$ in Gl. (26) wird mit Gl. (19) und Gl. (24)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} (M \vartheta^2) = & \frac{l^2}{4} \left\{ b_0 \sigma_{d_1} d\varepsilon_{d_1} (\varepsilon_{d_1} + \varepsilon_2) - b_1 \sigma_{d_1} d\varepsilon_{d_1} (\varepsilon_{d_1} + \varepsilon_2) + b_1 \sigma_1 d\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \right. \\ & + b_0 \sigma_{d_2} d\varepsilon_{d_2} (\varepsilon_{d_2} - \varepsilon_2) - b_2 \sigma_{d_2} d\varepsilon_{d_2} (\varepsilon_{d_2} - \varepsilon_2) + \frac{2F_{e_1}}{l} \sigma_{e_1} (\varepsilon_2 + \varepsilon_{e_1}) + \frac{2F_{e_1}}{l} \vartheta d\sigma_{e_1} (\varepsilon_2 + \varepsilon_{e_1}) + \\ & \left. + \frac{2F_{e_1}}{l} \sigma_{e_1} \vartheta d\varepsilon_{e_1} - \frac{2F_{e_2}}{l} \sigma_{e_2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_{e_2}) - \frac{2F_{e_2}}{l} \vartheta d\sigma_{e_2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_{e_2}) + \frac{2F_{e_2}}{l} \sigma_{e_2} \vartheta d\varepsilon_{e_2} \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (22) und (23) wird

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} (M \vartheta^2) = & \frac{l^2}{4} \left\{ b_0 \sigma_{d_1} \left[(d_0 - d_1) \frac{2}{l} - d\varepsilon_2 \right] (d_0 - d_1) \frac{2}{l} - b_1 \sigma_{d_1} \left[(d_0 - d_1) \frac{2}{l} - d\varepsilon_2 \right] \cdot \right. \\ & \cdot \left[(d_0 - d_1) \frac{2}{l} \right] + b_1 \sigma_1 \left(\frac{2d_0}{l} - d\varepsilon_2 \right) \frac{2}{l} d_0 - b_0 \sigma_{d_2} \left(d\varepsilon_2 - \frac{2}{l} d_2 \right) \frac{2}{l} d_2 + \\ & + b_2 \sigma_{d_2} \left(d\varepsilon_2 - \frac{2}{l} d_2 \right) \frac{2}{l} d_2 + \frac{2F_{e_1}}{l} \sigma_{e_1} \frac{2}{l} h_1 + \frac{2F_{e_1}}{l} d\sigma_{e_1} \frac{2}{l} h_1 + \frac{2F_{e_1}}{l} \sigma_{e_1} \vartheta d\varepsilon_{e_1} - \\ & \left. - \frac{2F_{e_2}}{l} \sigma_{e_2} \frac{2}{l} h_2 - \frac{2F_{e_2}}{l} d\sigma_{e_2} \frac{2}{l} h_2 + \frac{2F_{e_2}}{l} \sigma_{e_2} \vartheta d\varepsilon_2 - \frac{2F_{e_2}}{l} \sigma_{e_2} \frac{2}{l} h_2 \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Nach Vernachlässigung der Glieder mit ϑ^2 wird

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} (M \vartheta^2) = & \frac{l^2}{4} \left\{ d\varepsilon_2 \frac{2}{l} [\sigma_{d_1} (d_0 - d_1) (b_1 - b_0) - b_1 \sigma_1 d_0 + \sigma_{d_2} d_2 (b_2 - b_0) - F_{e_1} \sigma_{e_1} + F_{e_2} \sigma_{e_2}] + \right. \\ & \left. + \frac{4}{l^2} \vartheta [\sigma_{d_1} (d_0 - d_1)^2 (b_0 - b_1) + b_1 \sigma_1 d_0^2 + \sigma_{d_2} d_2^2 (b_0 - b_2) + 2F_{e_1} \sigma_{e_1} h_1 - 2F_{e_2} \sigma_{e_2} h_2] \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Mit Gl. (24) wird aus Gl. (29), wenn

$$\left. \begin{aligned} A &= \sigma_{d_1} (d_0 - d_1) (b_0 - b_1), \\ B &= b_1 \sigma_1 d_0, \\ C &= \sigma_{d_2} d_2 (b_0 - b_2), \\ D &= F_{e_1} \sigma_{e_1}, \\ E &= F_{e_2} \sigma_{e_2} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

bezeichnen und für den Bruch wie beim Rechteckquerschnitt $\frac{dM}{d\vartheta} = 0$ gilt, das Bruchmoment

$$\begin{aligned}
 M_b = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{-(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 - E^2) - 2[A(B + C + D - E) + B(C + D - E) + C(D - E) - DE]}{b_2 \sigma_2 + \frac{B}{d_0} + \frac{A}{d_0 - d_1} + \frac{C}{d_2}} + \right. \\
 & \left. + A(d_0 - d_1) + B d_0 + C d_2 + 2(F_{e_1} \sigma_{e_1} h_1 - F_{e_2} \sigma_{e_2} h_2) \right\}. \quad (31)
 \end{aligned}$$

Für den Rechteckquerschnitt wird mit $d_1 = d_2 = d_0 = d$, $b_1 = b_2 = b_0 = b$, $F_e = F_e' = 0$ in Gl. (30)

$$A = 0, \quad B = b \sigma_1 d, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 0,$$

$$M_b = \frac{b d^2}{2} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad (32)$$

wie in Gl. (15), wobei die Bedingung $\Sigma H = 0$ nach Gl. (14) gilt. Für den T-Querschnitt wird mit $d_1 = 0$, $b_1 = b_0$, $F_e = F_e' = 0$ in Gl. (30)

$$A = 0, \quad B = b_0 \sigma_1 d_0, \quad C = \sigma_{d_2} d_2 (b_0 - b_2), \quad D = 0, \quad E = 0,$$

$$M_b = \frac{1}{2} \left(\frac{-B^2 - C^2 - 2BC}{b_2 \sigma_2 + \frac{B}{d_0} + \frac{C}{d_2}} + B d_0 + C d_2 \right). \quad (33)$$

Die für die Berechnung von A bis C erforderlichen Werte von σ werden durch Iteration aus Gl. (19), (20) und (21) mit der bekannten Bruchranddehnung und angenommenen Werten der zugehörigen Bruchrandstauchung oder umgekehrt erhalten, je nachdem der Bruch durch das Versagen des Zug- oder Druckrandes eintritt. Für einen Werkstoff mit gleich großer Zug- und Druckfestigkeit und $c = \frac{\sigma_d}{\sigma_z} = 1^{15}$ würde mit

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_b$ aus Gl. (21) $\varepsilon_{d_2} = \varepsilon_b \left(1 - \frac{2d_2}{d_0}\right)$, wodurch Gl. (20) überbestimmt wäre.

Daraus ist zu ersehen, daß auch bei einem solchen Werkstoff die gleichzeitige Erreichung der Festigkeit am oberen und unteren Rande nur bei zur Schwerlinie symmetrischen Querschnitten möglich ist, was mit dem Ergebnis der elastizitätstheoretischen Berechnung übereinstimmt.

Für den I-Querschnitt gilt Gl. (31) ohne die Glieder F_{e_1} und F_{e_2} . Die Bedingung Gl. (20) wird so wie oben durch Iteration aus Gl. (21) für gegebene Werte von ε_1 bzw. ε_2 erfüllt. Für den in Höhe und Breite symmetrischen I-Querschnitt mit $d_1 = d_2 = d$, $b_1 = b_2 = b$ und $c = 1$, das heißt $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_b$ wird aus Gl. (21)

$$\varepsilon_d = 2 \varepsilon_b \frac{d_0 - d}{d_0} - \varepsilon_b = \varepsilon_b \left(1 - \frac{2d}{d_0}\right). \quad (34)$$

Die Gl. (18) ergibt $-F_1' = F_2'$, $-F_1'' = F_2''$, womit Gl. (20) erfüllt ist. In Gl. (30) wird mit $\sigma_{d_1} = \sigma_{d_2} = \sigma_d$

$$A = \sigma_d (d_0 - d) (b_0 - b), \quad B = b \sigma_1 d_0, \quad C = \sigma_d d (b_0 - b), \quad (35)$$

womit sich das Bruchmoment nach Gl. (31) ergibt. Für lineare Spannungs-Dehnungsbeziehungen bis zum Fließen bzw. Bruch und $c = 1$ wird mit $\sigma = \varepsilon \cdot E$ in Gl. (35)

$$A = \varepsilon_b E \left(1 - \frac{2d}{d_0}\right) (d_0 - d) (b_0 - b), \quad B = \varepsilon_b E b d_0, \quad C = \varepsilon_b E \left(1 - \frac{2d}{d_0}\right) (b_0 - b). \quad (35a)$$

Für $d = 0$ oder $d = d_0$, $b = b_0$, $\varepsilon_b E = \sigma$ wird in Gl. (35a)

$$A = 0, \quad B = \varepsilon_b E b d, \quad C = 0$$

und Gl. (31)

$$M_b = \frac{b d^2}{4} \sigma$$

wie für den Rechteckquerschnitt nach Gl. (16).

Im zugbewehrten Rechteckquerschnitt wird nach Gl. (30) mit $d = d_0 = d$ oder $d = 0$, $b_0 = b_1 = b_2 = b$, $h_1 = h$

$$A = 0, \quad B = b \sigma_1 d, \quad C = 0, \quad D = F_e \sigma_e, \quad E = 0,$$

$$M_b = \frac{1}{2} \left[b d^2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} + F_e \sigma_e \left(2h - \frac{2d \sigma_1 + \frac{F_e \sigma_e}{b}}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \right]. \quad (36)$$

Wird die Zugbeanspruchung im Grundwerkstoff nicht in Rechnung gestellt (Ausschluß der Betonzugzone im Stahlbetonbalken), so wird Gl. (36) mit $\sigma_1 = 0$

$$M_b = \frac{1}{2} F_e \sigma_e \left(2h - \frac{F_e \sigma_e}{b \sigma_2} \right). \quad (36a)$$

Aus Gl. (20) folgt mit

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\varepsilon_1}^0 f(\varepsilon) d\varepsilon &= -F_1, & \int_0^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) d\varepsilon &= -F_2, & \text{a)} \\ \frac{F_e \sigma_e (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{b d} &= F^e, & & & \text{b)} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$F^e = -F_1 + F_2. \quad (38)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aus den bekannten Bruchdehnungen ε_1 und ε_2 gegeben. Aus Gl. (37b) ergibt sich daraus die beim Bruch in der Bewehrung vorhandene Spannung σ_e , wobei zu beachten ist, daß die nach Gl. (21) für einen angenommenen Wert von ε_1 berechnete Dehnung der Bewehrung ε_e bereits aus der Beziehung $\sigma_e = f(\varepsilon_e)$ die Spannung in der Bewehrung festlegt. Da $F_2 \gg F_1$, kann $F_2 - F_1 \doteq F_2$ gesetzt werden, womit

$$\sigma_e = \frac{F_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{b d}{F^e}, \quad \text{wobei} \quad \sigma_e = f(\varepsilon_e). \quad (39)$$

Durch Iteration ergibt sich daraus die beim Bruch des Stahlbetonbalkens in der Bewehrung vorhandene Spannung σ_e .

Im zug- und druckbewehrten Rechteckquerschnitt mit $d_0 = d$ oder $d = 0$, $b_0 = b$ ist mit Gl. (30) $A = 0$, $B = b \sigma_1 d$, $C = 0$, $D = F_{e_1} \sigma_{e_1}$, $E = F_{e_2} \sigma_{e_2}$

$$M_b = \frac{1}{2} \left[b d^2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} + F_{e_1} \sigma_{e_1} \left(2h_1 - \frac{2d \sigma_1 + \frac{F_{e_1} \sigma_{e_1}}{b}}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) - F_{e_2} \sigma_{e_2} \left(2h_2 - \frac{2d \sigma_1 + \frac{F_{e_2} \sigma_{e_2}}{b}}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \right]. \quad (40)$$

Bei Ausschluß der Betonzugspannungen wird mit $\sigma_1 = 0$ aus Gl. (40)

$$M_b = \frac{1}{2} \left[F_{e_1} \sigma_{e_1} \left(2h_1 - \frac{F_{e_1} \sigma_{e_1}}{b \sigma_2} \right) - F_{e_2} \sigma_{e_2} \left(2h_2 - \frac{F_{e_2} \sigma_{e_2}}{b \sigma_2} \right) \right]. \quad (40a)$$

Mit den Bezeichnungen nach Gl. (37) bzw. (18) wird Gl. (20)

$$F_2 - F_1 = F^e - F^{e'}, \quad (41)$$

woraus wie vorhin die Spannungen σ_{e_1} , σ_{e_2} und σ_1 für den bekannten Wert von σ_2 gegeben sind. Wegen $F_2 \gg F_1$ wird wie oben

$$\left. \begin{aligned} F_2 &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{b d} (F_{e_1} \sigma_{e_1} - F_{e_2} \sigma_{e_2}), \\ \varepsilon_{e_1} &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{h_1}{d} - \varepsilon_2, \\ \varepsilon_{e_2} &= \varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{h_2}{d}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Mit den bekannten Beziehungen $\sigma_{e_1} = f(\varepsilon_{e_1})$, $\sigma_{e_2} = f[\varepsilon_{e_2}(\varepsilon_{e_1})]$ stellt Gl. (42) eine durch Iteration eindeutig lösbare Bestimmungsgleichung für σ_{e_1} und σ_{e_2} dar.

In der gleichen Art bestimmt die Gl. (20) die Spannungen für Gl. (31), woraus sich noch die Bruchmomente für den T- und I-Stahlbetonquerschnitt ergeben. Für den T-Stahlbetonquerschnitt wird bei Ausschluß der Betonzugzone mit $d_1 = 0$, $b_1 = b_0$, $\sigma_1 = 0$, $h_1 = h$ in Gl. (30) $A = 0$, $B = 0$, $C = \sigma_{d_2} d_2 (b_0 - b_2)$, $D = F_e \sigma_e$, $E = 0$ und in Gl. (31)

$$M_b = \frac{1}{2} \left[\frac{-C(2D + C)}{b_2 \sigma_a + \frac{C}{d_2}} \right] + C d_2 + 2 D h, \quad (43)$$

wobei σ_{d_2} und σ_e nach Gl. (19), (20) und (21) durch Iteration für den bekannten Wert ε_2 und den angenommenen Wert von ε_1 zu bestimmen ist.

V. Versuche mit Stahlbetonbalken.

Für einen unbewehrten Betonbalken mit rechteckigem Querschnitt wurde das Bruchmoment bereits in Abschn. C berechnet. Weitere Versuche mit unbewehrten Betonbalken und ausreichender Angabe der Betonfestigkeiten im einachsigen Versuch sind nicht allgemein bekannt. Von den zahlreichen Balkenversuchen mit einfach bewehrtem Rechteck- und Rippenquerschnitt sowie doppelt

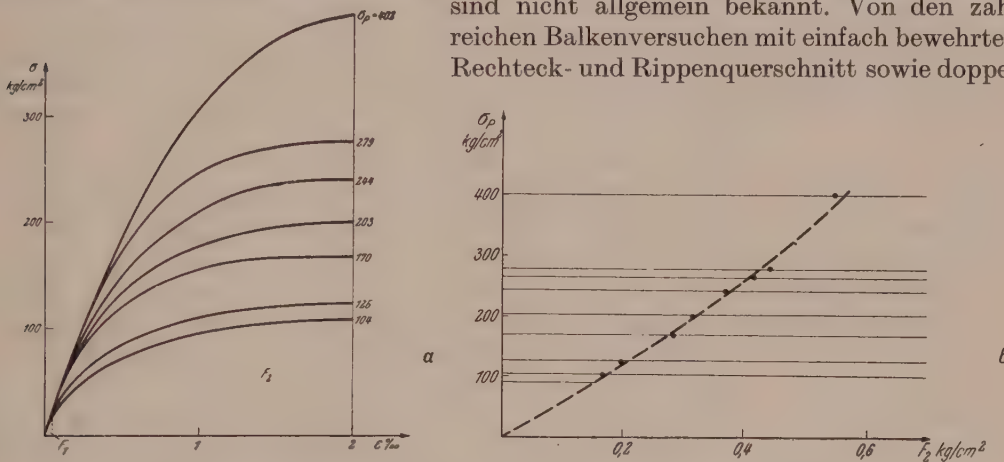


Abb. 6. Flächeninhalt der Spannungs-Stauchungslinien von Beton.

bewehrtem Rechteckquerschnitt wurden diejenigen ausgewertet, welche ausreichende Versuchsprotokolle ausweisen und wo die Versuchsdurchführung keine Mängel aufzeigte, soweit die Literatur dem Verfasser erreichbar war. Versuche mit Stahlbetonbalken von doppelt bewehrtem Rippenquerschnitt sowie I-Querschnitt sind bisher nicht allgemein bekanntgeworden. Die Druck-Stauchungslinien des Betons sowie die Werte von F_2 sind für mehrere Größen der Prismenfestigkeit in Abb. 6 aufgetragen. Da eine Angabe der Zugfestigkeit des Betons fast ausnahmslos fehlt, wurde diese mit ein Zehntel der Prismenfestigkeit angenommen. Die Versuche wurden durchwegs in der bekannten Art ausgeführt, daß stufenweise belastet und wieder entlastet wurde. Zum Teil erfolgte kurz vor dem Bruch wieder eine Entlastung (Bach-Graf, Gehler), zum Teil wurde ab einer weit niedrigeren Laststufe bis zum Bruch ohne Entlastung belastet (Empa-Versuche). Dadurch ist bei der gemessenen Bruchlast die Mitwirkung der Betonzugzone mehr oder weniger ausgeschaltet. Dies wurde bei der Berechnung der Bruchlast dadurch berücksichtigt, daß aus dem Unterschied der theoretischen Werte des Bruchmomentes mit und ohne Betonzugzone der Anteil der Betonzugzone am Bruchmoment berechnet wurde. Dieser Anteil ist angenähert proportional dem Verhältnis zwischen der letzten Laststufe vor der Bruchlast und Bruchlast. Durch Addition des tatsächlichen Anteiles der Betonzugzone zum Bruchmoment ohne

Betonzugzone ergibt sich der theoretische Wert des Bruchmomentes eines Versuchsbalkens. Damit konnte auch das Bruchmoment schwach bewehrter Balken zutreffend berechnet werden. Nach R. Saliger²¹ entstehen durch das Schwinden des Betons im einseitig bewehrten Rechteckbalken bei $\varepsilon_s = 10 \cdot 10^{-5} n = \frac{F_e}{E_b} = 15$, $d - h_1 = 0.1 d$ je nach dem Bewehrungsgrad $\mu = \frac{F_e}{b h_1}$ von $\mu = 0.005$ bis 0.040 , am Betonrand Zugspannungen von 2.9 bis 10.4 kg/cm^2 , Druckspannungen von 1.2 bis 4.3 kg/cm^2 und in der Bewehrung Druckspannungen von 170 bis 25 kg/cm^2 . Der Einfluß dieser Spannungen auf das Bruchmoment wurde zunächst in der Rechnung nicht berücksichtigt, da dieser wegen der nur angenäherten Angaben über die Baustoffgüten (Prismenfestigkeit nicht aus der Balkendruckzone bestimmt, Zugfestigkeit geschätzt, teilweise Ausschaltung der Betonzugzone usw.) innerhalb des hier erreichbaren Streuungsgebietes liegt.

In den Versuchen von Bach-Graf 1907¹² ist für den einfach bewehrten Rechteckbalken Nr. 52 mit den Abmessungen $d = 30.54 \text{ cm}$, $h = 29.04 \text{ cm}$, $b = 15.09 \text{ cm}$ und den Werkstoffkennwerten $\sigma_P = 146 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_Z = 13.6 \text{ kg/cm}^2$, $F_e = 2.36 \text{ cm}^2$, $\sigma_s = 3200 \text{ kg/cm}^2$ aus Gl. (39) $\sigma_e = \sigma_s = 3200 \text{ kg/cm}^2$, womit bei Mitwirkung der Betonzugzone nach Gl. (36) das Bruchmoment $M_b' = 274000 \text{ kgcm}$ wird. Bei Ausschluß der Betonzugzone wird das Bruchmoment nach Gl. (36a) $M_b'' = 205000 \text{ kgcm}$. Dabei ist das Verhältnis der letzten Laststufe vor dem Bruch zur Bruchlast $\frac{8000}{8500} = 0.94$. Der Anteil der Betonzugzone am Bruchmoment ist $274000 - 205000 = 69000 \text{ kgcm}$, wovon nur noch $(100 - 94)\% = 6\%$ wirksam sind. Damit ist das Bruchmoment $M_b = 205000 + 0.06 \cdot 69000 = 209150 \text{ kgcm}$ gegenüber dem gemessenen Bruchmoment von 218800 kgcm .

In den Versuchen von M. Roš²² ist für den mit Torstahl 40 bewehrten Plattenbalken TS 250 14 mit den Abmessungen $b_0 = 17 \text{ cm}$, $b_2 = 43 \text{ cm}$, $d_0 = 32 \text{ cm}$, $d_2 = 12 \text{ cm}$, $h_1 = 29 \text{ cm}$ und den Werkstoffkennwerten $\sigma_P = 216 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_Z = 21.6 \text{ kg/cm}^2$, $F_e = 4.74 \text{ cm}^2$ und nach Gl. (20) $\sigma_e = 4700 \text{ kg/cm}^2$, womit nach Gl. (30) $A = 0$, $B = 11800$, $C = -6750$, $D = 22300$ und bei Mitwirkung der Betonzugzone nach Gl. (31) das Bruchmoment $M_b' = 760000 \text{ kgcm}$ und bei Ausschaltung der Betonzugzone das Bruchmoment $M_b'' = 590500 \text{ kgcm}$ wird. Das Verhältnis der Laststufen ist $\frac{3000}{8850} = 0.34$, womit wie oben das Bruchmoment $M_b = 590500 + 112000 = 702500 \text{ kgcm}$ wird, gegenüber dem gemessenen von 708000 kgcm .

In den Versuchen von W. Gehler, H. Amos und E. Friedrich²³ ist für den doppelt bewehrten Rechteckbalken Nr. 103 mit den Abmessungen $b = 30 \text{ cm}$, $d = 20.5 \text{ cm}$, $h_1 = 17 \text{ cm}$, $h_2 = 3.5 \text{ cm}$ und den Werkstoffkennwerten $\sigma_P = 123 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_Z = 12.3 \text{ kg/cm}^2$, $F_{e_1} = F_{e_2} = 6.28 \text{ cm}^2$, $\sigma_s = 2425 \text{ kg/cm}^2$ nach Gl. (41) $\sigma_{e_1} = 2815 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{e_2} = 590 \text{ kg/cm}^2$, womit das Bruchmoment bei Mitwirkung der Betonzugzone nach Gl. (40) $M_b' = 296500 \text{ kgcm}$ und bei Ausschluß der Betonzugzone nach Gl. (40a) das Bruchmoment $M_b'' = 244850 \text{ kgcm}$ wird. Mit dem Laststufenverhältnis $\frac{4717}{5158} = 0.92$ wird wie oben das Bruchmoment $M_b = 244850 + 4100 = 248950 \text{ kgcm}$ gegenüber dem gemessenen von 245200 kgcm . Von diesen Versuchen wurde noch der Balken Nr. 114 ausgewertet, der den theoretischen Wert

²¹ R. Saliger: Der Stahlbetonbau, 7. Aufl. Wien: Franz Deuticke, 1949.

²² M. Roš: Festigkeit und Verformung von auf Biegung beanspruchten Eisenbetonbalken. EMPA-Bericht Nr. 141. Zürich, 1942.

²³ W. Gehler, H. Amos und E. Friedrich: Versuche an Stahlbetonbalken zur Bestimmung der Bewehrungsgrenze. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H. 100. Berlin: W. Ernst u. Sohn, 1943.

für das Bruchmoment bei Ausschluß der Betonzugzone von $M_b = 176300$ kgcm ergibt. Der gemessene Wert von 162430 kgcm liegt wesentlich niedriger, was mit der tatsächlich erfolgten Zerstörung des Balkens an den Auflagern und nicht durch reine Biegung in Übereinstimmung steht. In der gleichen Art wurden die anderen auswertbaren und kennzeichnenden Balken der soeben genannten Versuche und weitere der Versuche von Bach-Graf 1910¹⁶, A. Brandtzaeg²⁴ und der Schmidt-stahlwerke mit Torstahl 60²⁵ ausgewertet. Die theoretischen Werte sind in Tab. 3 mit den gemessenen verglichen und zeigen eine Abweichung von höchstens 9%.

Tabelle 3.

Versuch von	Probe Nr.	Querschnitt	$\frac{M_{\text{Rechnung}}}{M_{\text{Versuch}}}$	σ_P kg/cm ²	σ_S kg/cm ²	μ	Berechnet nach Gl.	Stahl
Bach-Graf 1907	66	Rechteck	1·015	146			15	
	52	„	0·960	146	3200	0·0027	36, 36 a	—
Bach-Graf 1910	328	Rechteck	0·953	104	3400	0·075	36, 36 a	
	395	Rippen	1·090	120	3400	0·018	31, 43	—
EMPA 1942	TS 300	Rechteck	0·990	244	4140	0·0045	36, 36 a	Torstahl 40
			0·972	204	3840	0·0089		
	TS 250	„	0·978	244	3970	0·0183		
			0·913	157	4140	0·0045		
			0·930	160	3840	0·0089		
			0·965	209	3970	0·0183		
	ST 52/250	„	0·968	150	4520	0·0087		St 52
	St N/300	„	1·080	279	3250	0·0142		St N
Gehler 1943	TS 25014	Rippen	0·993	216	3955	0·0038	31, 43	Torstahl 40
	103	Rechteck	1·020	123	2425	0·0123 = μ'	40, 40 a	
	75	„	0·923	120	2925	0·0017	36, 36 a	—
	88	„	0·933	118	2425	0·0123		
	99	„	0·998	117	2425	0·0308		
Brandtzaeg 1935	A ^b	Rechteck	1·025	246	3010	0·0499	36, 36 a	
	C ^a	„	1·020	193	2990	0·0502		—
	E ^a	„	0·962	126	2930	0·0512		
Schmidt- Stahlwerke 1950	A ₃	Rechteck	0·972	175	6010	0·0029	36, 36 a	Torstahl 60
	B ₄	„	0·998	190	7390	0·0077		
	H ₁	Rippen	1·015	218	7040	0·0047	31, 43	
	P ₁	„	0·928	175	6990	0·0117		

(Eingegangen am 23. Juni 1953.)

Verdrehung bildsamer Metallstäbe über die Fließgrenze.

Von W. Starnberg, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die Verdrehungsbeanspruchung von Metallstäben an der Fließ- und Bruchgrenze einschließlich des Verfestigungsbereiches wird mit Hilfe eines in der Grenzbedingung vorkommenden Parameters berechnet. Die Sonderfälle des Fließens und des Sprödbrechens werden mit Hilfe der speziellen Werte dieses Parameters erhalten. Die berechneten Werte zeigten gute

²⁴ A. Brandtzaeg: Eisenbetonfragen. Festschrift der Techn. Hochschule Drontheim, 1935; Eisenbetonfragen. Beton u. Eisen, H. 14 (1936).

²⁵ Magistrat der Stadt Wien: M.-A. 39, Städt. Prüf- und Versuchsanstalt, Zahl MA 39, M 318/49.

Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Die Gleichungen für die Normal- und Schubspannung und für den Gleitwinkel 2α wurden aufgestellt.

Summary. By means of a parameter occurring in the limiting condition, the torsional strain of metallic bars at the yielding and breaking points is computed. The special cases of flow and of brittleness fracture are obtained from special values of that parameter. The computed values agree with experiments. The equations for the normal and shearing stresses and for the slip angle 2α are also established.

Résumé. Au moyen d'un paramètre qui se trouve dans la condition aux limites, l'auteur détermine l'effort de torsion des barres métalliques aux limites d'écoulement et de rupture. Les cas particuliers de l'écoulement et de la rupture cassante résultent des valeurs spéciales de ce paramètre. Les valeurs obtenues sont de bon accord avec les essais. Enfin, l'auteur déduit les équations pour les efforts normal et de cisaillement et pour l'angle de glissement 2α .

I. Einleitung.

Die Grenzen der Beanspruchung werden je nach der Formänderungsgröße verschieden in: Fließ-, Verfestigungs- und Bruchgrenze. Die Spannungen grenzbeanspruchter Körper für je eine der vorerwähnten Grenzen wurden bisher immer für

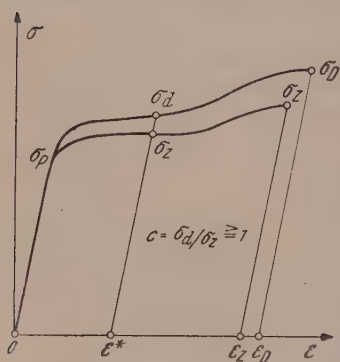


Abb. 1. Abschätzung der Zahl $c = \sigma_d / \sigma_z$.

sich gesondert ermittelt. So z. B. untersucht Nadai¹ (S. 117 und 121) die Biegebeanspruchung eines Stahlstabes getrennt für den ideal plastischen Fall und für den Fall mit Verfestigung. Aufgabe dieser Arbeit soll es sein, die Spannungen bei der Verdrehung von Metallstäben für alle oberwähnten Grenzen zu berechnen, so daß sie alle mit Hilfe eines Parameters analytisch erfaßt werden. Die Fälle, welche etwa den Arbeiten von Nadai^{1,2} und Schaden³ über Verdrehung zugrunde liegen, müssen sich dann als Sonderfälle ergeben. Nadai hat nämlich eingehend die Verdrehung von Stäben bildsamer Metalle beim Fließbeginn sowie bei über den Querschnitt voll ausgebildetem plastischem Zustand untersucht. Schaden hingegen hat die Verdrehungs-

festigkeit von Stäben spröder Stoffe (Gesteine, Beton, Gußeisen usw.) berechnet. Um nun alle Stadien vom Fließbeginn bis zum Bruch zu erfassen, wird hier die von Leon⁴ eingeführte Kennzahl

$$c = \sigma_D / \sigma_Z \quad (1)$$

als Parameter verwendet. Leon hat zwar durch diese Kennzahl nur das Verhältnis zwischen Druck- und Zugfestigkeit festgelegt, damit aber gleichzeitig eine wichtige Größe zur quantitativen Erfassung des Sprödigkeitsgrades von Stoffen geliefert. So werden z. B. mit $c = 1$ bildsame Metalle (Baustahl, Aluminium usw.), mit $c = 3 \div 5$ Gußeisen, mit $c = 10 \div 25$ Beton und Gesteine usw. erfaßt (s. Hütte I⁵, S. 765). Torre⁶ hat die Kennzahl c Gl. (1) dahingehend verallgemeinert, daß sie bei ein- und demselben Stoff veränderlich angenommen wird. Diese Annahme folgt aus der Beobachtung der Spannungs-Dehnungslinien (Abb. 1) für Druck und Zug eines bestimmten Stoffes. Fallen diese zwei Linien zusammen, dann gilt für den

¹ A. Nadai: Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Berlin: J. Springer. 1927.

² A. Nadai: Plastizität und Erddruck. Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 428. Berlin: J. Springer. 1928. Plastic Torsion, Transf. of the Americ. Soc. of mech. Engineers, Appl. Mechanics, S. 29. 1930. Theory of Flow and Fracture of Solids. New York: McGraw-Hill Book Comp. 1950.

³ K. Schaden: Österr. Ingenieur-Arch. 6, 12 (1951).

⁴ A. Leon: Ingenieur-Arch. 4, 421 (1933).

⁵ Hütte I: Ing.-Taschenb., 27. Aufl. Berlin: Wilh. Ernst & Sohn. 1941.

⁶ C. Torre: Österr. Ingenieur-Arch. 4, 174 (1950).

ganzen Bereich etwa von der Proportionalitätsgrenze bis zur Bruchgrenze $c = 1$. Trennen sich aber diese zwei Linien etwa nach der Proportionalitätsgrenze, dann ist die Zahl c von dieser Grenze an bis zum Bruch veränderlich. Insbesondere bewegt sie sich bei bildsamen Metallen, welche hier ausschließlich betrachtet werden sollen, in den Grenzen

$$1 \leq c \leq 2 \text{ bis } 3. \quad (2)$$

Die Versuche von Roš und Eichinger⁷ zeigen dies sehr deutlich, daß die Spannungs-Dehnungslinien auseinandergehen.

Torre⁶ bezeichnet zum Unterschied von Leon die Zahl c (s. auch Abb. 1) mit

$$c = \sigma_d / \sigma_z. \quad (3)$$

Für $c = 1$ befindet man sich etwa an der Fließgrenze des betreffenden Stoffes, für $c > 1$ an einer signierten Formänderungsgrenze ε^* nach Abb. 1. An der Fließgrenze wird $\sigma_d = \sigma_q$ (Quetschgrenze = Fließgrenze bei Druckbeanspruchung) und $\sigma_z = \sigma_s$ (Streckgrenze = Fließgrenze bei Zugbeanspruchung), an der Bruchgrenze hingegen wird $\sigma_d = \sigma_D$ (Druckfestigkeit) und $\sigma_z = \sigma_Z$ (Zugfestigkeit). Soin sind also Gl. (2) und (3) für ein- und dasselbe Material zu nehmen und nicht wie Leon gemeint hat, daß mit jeder Zahl c jeweils ein Material charakterisiert wird.

Hiermit ist die Möglichkeit gegeben, die Beanspruchung der Metalle einheitlich, das heißt mit einer einzigen Grenzbedingung bei Änderung des Parameters c , von der Fließgrenze bis zum Bruch zu erfassen. In dieser Erfassung der verschiedenen Beanspruchungsgrenzen liegt der eigentliche Zweck dieser Arbeit, wobei die Verdrehung bildsamer Metallstäbe nur als Beispiel dient, um die erwähnte Möglichkeit an einem einfachen Fall zu veranschaulichen. Damit wird erwiesen, daß eine einheitliche Theorie der Grenzbeanspruchungen, die zunächst von Torre⁸ untersucht wurde, durchaus möglich und auch zweckdienlich ist.

Die in diesem Beitrag vorkommenden Spannungsgrößen werden immer auf den jeweiligen Querschnitt bezogen. Das bedeutet nach Ludwik⁹ z. B. für den einachsigen Zug bei verschwindender Volumsänderung $e = 0$:

$$\sigma_Z = \sigma_{Z0} (1 + \varepsilon_Z), \quad (4)$$

wobei ε_Z die Bruchdehnung ist. Ist die Volumsänderung verschieden von Null ($e \neq 0$), dann folgt der gleiche Ausdruck nach Torre⁶ (S. 188, Anm. 27)

$$\sigma_Z = \frac{1 + \varepsilon_Z}{1 + e} \cdot \sigma_{Z0}. \quad (5)$$

Das Material wird nicht als isotrop und homogen vorausgesetzt. Die anisotropischen Eigenschaften eines Materials kommen mathematisch durch Spannungs-Dehnungsbeziehungen zum Ausdruck. Da hier ausschließlich mit den Gleichgewichtsbedingungen und der Grenzbedingung gearbeitet wird, erstreckt sich die Gültigkeit der so gewonnenen Gleichungen auch auf anisotrope Stoffe. Nach Mises¹⁰ und Hill¹¹ unterscheidet sich wohl die Grenzbedingung für isotrope und anisotrope Stoffe durch die in ihr auftretenden Koeffizienten. Da es sich hier aber um ein quasiisotropes Metall handelt, kann man sich damit begnügen, die Anisotropie durch die Zahl c zu erfassen.

⁷ M. Roš und A. Eichinger: Bericht Nr. 14 der EMPA in Zürich, 1926. Bericht Nr. 34, Zürich, 1929. Bericht Nr. 172, Zürich, 1949.

⁸ C. Torre: Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. 15, 116, 145 (1949); Österr. Ingenieur-Arch. 4, 93 (1950).

⁹ P. Ludwik: Elemente der Technologischen Mechanik, S. 18, Anm. 15. Berlin: J. Springer, 1909.

¹⁰ R. v. Mises: Z. angew. Math. Mechan. 8, 161 (1928).

¹¹ R. Hill: The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, 1950.

Das würde sich hierdurch auswirken, daß ein Metall verschiedene Festigkeiten σ_d und σ_z in verschiedenen oder mindestens in einigen Richtungen hat. Diese Eigenschaften treten meistens bei Gesteinen deutlich zutage, während bei bildsamen Metallen fast keine diesbezüglichen Unterschiede zu erwarten sind.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Dozenten Dipl.-Ing. Dr. techn. C. Torre.

II. Die Grenzbedingung.

Die von Torre⁶ vorgeschlagene und eingehend untersuchte Grenzbedingung für spröden Bruch und plastisches Verhalten bildsamer Metalle wird gegenständlicher Arbeit zugrunde gelegt. Die Grenzbedingung wird nachfolgend im Sinne ihrer Anwendung noch eine Erweiterung erfahren. Sie diene bisher nur allgemeinen Festigkeitsuntersuchungen, während sie hier zur Berechnung der Spannungen in einem tordierten Stab herangezogen wird. Sie lautet zunächst in Hauptnormalspannungen ausgedrückt

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 2(c-1)\sigma_z(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) &= 2c\sigma_z^2, \\ 1 \leq c \leq 2 \text{ bis } 3, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

bzw. in Koordinaten des Spannungstensors

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + \\ + 2(c-1)\sigma_z(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 2c\sigma_z^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Grenzbedingung Gl. (6) stellt im Koordinatensystem der Hauptnormalspannungen ein Paraboloid dar, das für $c > 0$ (was hier übrigens der Fall sein wird) zur negativen Kompressionsachse

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$$

offen ist. Für $c = 1$ geht die Grenzbedingung Gl. (6) in die bekannte Fließbedingung von Mises¹² und Hencky¹³ über (sog. Gestaltänderungstheorie).

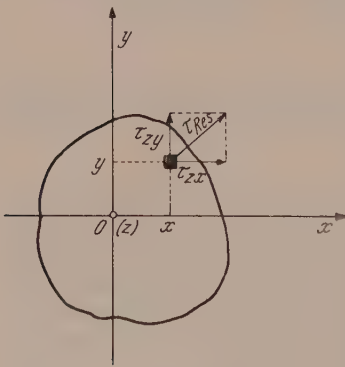


Abb. 2. Spannungen im Stabquerschnitt.

Für den Fall der reinen Verdrehungsbeanspruchung (Verdrehung unter üblichen atmosphärischen Verhältnissen und Zimmertemperatur) gilt

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0.$$

Dann lautet Gl. (7) für diesen Fall

$$\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = \frac{c}{3} \cdot \sigma_z^2. \quad (8)$$

In Abb. 2 ist ein Querschnitt des verdrehten Stabes gezeichnet mit der Stabachse parallel z-Achse. Die Querschnittsebene liegt in der Koordinatenebene (x, y). Man sieht aus Abb. 2, daß die resultierende Schubspannung

$$\tau_{\text{res}}^2 = \tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2. \quad (9)$$

Die Unterschiede τ_{zx} und τ_{xz} usw. sind hier bedeutungslos, da bekanntlich $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ist. Aus Gl. (8) und (9) ergibt sich, daß bei der Grenzbeanspruchung die resultierende Schubspannung τ_{res} in jedem Punkt des Querschnittes Abb. 2 der Grenzbeanspruchung

$\pm \sigma_z \sqrt{\frac{c}{3}}$ gleich sein muß

$$\tau_{\text{res}} = \pm \sigma_z \sqrt{\frac{c}{3}}. \quad (10)$$

¹² R. v. Mises: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, H. 4, 582 (1913).

¹³ H. Hencky: Z. angew. Math. Mechan. 4, 323 (1924).

Für eine Verdrehung, bei der die mittlere Hauptnormalspannung $\sigma_2 = 0$ ist, gilt bekanntlich

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_v. \quad (11)$$

Dann wird nach Gl. (6) und (11)

$$\tau_v = \pm \sigma_z \sqrt{\frac{c}{3}}. \quad (12)$$

Aus Gl. (11) und (12) ist ersichtlich, daß die Grenzs Schubspannung τ_v gleich der resultierenden Schubspannung τ_{res} eines grenzbeanspruchten Querschnittes ist. Es ist wichtig, zu Gl. (12) hervorzuheben, daß die Grenzs Schubspannung von den Festigkeitskonstanten abhängt. Dies sind die Zugzugbeanspruchung σ_z und die Zahl c nach Gl. (3).

Nadai¹ rechnet mit Gl. (9) als Grenzbedingung, indem er für ideal plastische Stoffe

$$\tau_{\text{res}} = k = \text{konst.}$$

annimmt. Es bleibt offen, ob für

$$k = \frac{\sigma_s}{2} \quad \text{oder} \quad k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

genommen werden soll. Der zweite Ausdruck stimmt mit Gl. (10) für $c = 1$ überein. Somit gilt nach Nadai

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2. \quad (13)$$

Die Grenzbedingungen Gl. (8) und (13) besagen, daß es sich hier um gleiche Grenzbedingungen, aber mit verschiedenen Konstanten handelt, so daß die Berechnung der Verdrehungsfestigkeit in Anlehnung an die Ergebnisse von Nadai erfolgt. Es ist aber, wie zuvor schon erwähnt wurde, die erweiterte Bedeutung der Ergebnisse hervorzuheben. Insbesondere, daß man auf diese einfache Art in Gebiete über die Plastizitätsgrenze kommt und daß der ganze Verformungsbereich von der Plastizitätsgrenze bis zum Bruch mit Hilfe des Parameters c analytisch erfaßt wird.

III. Die plastische Spannungsfunktion.

Die im vorigen Abschnitt genannten Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} müssen außer der Grenzbedingung Gl. (8) noch der Gleichgewichtsbedingung in der z -Richtung

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

genügen. Die anderen zwei Gleichgewichtsbedingungen in x - und y -Richtung ergeben nur, wegen $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$, daß sich τ_{xz} und τ_{yz} in der Richtung der Stabachse nicht ändern dürfen, also $\partial \tau_{xz} / \partial z = 0$ und $\partial \tau_{yz} / \partial z = 0$.

Es wird hier nach Nadai¹ (S. 95) die Spannungsfunktion $F(x, y)$ eingeführt, die die Gleichgewichtsbedingung Gl. (14) befriedigt, was sich aus

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad (15)$$

ergibt. Sie kann geometrisch als eine über den Stabquerschnitt gespannte Fläche angesehen werden. Setzt man Gl. (15) in den Ausdruck für die Grenzbedingung Gl. (8) ein, dann muß die Spannungsfunktion F der Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 = \frac{c}{3} \cdot \sigma_z^2 \quad (16)$$

genügen. Es ist wichtig, Gl. (16) noch in Vektorform zu schreiben

$$(\nabla F) \cdot (\nabla F) = (\nabla F)^2 = \frac{c}{3} \sigma_z^2$$

bzw.

$$|\text{grad } F| = \sigma_z \sqrt{\frac{c}{3}}. \quad (17)$$

Gl. (17) besagt, daß der Gradient von F , das heißt die größte Steigung der Fläche F , konstant ist, während bei der Beanspruchung im Gebiete der elastischen Formänderungen diese Steigung jeweils gleich der resultierenden Schubspannung τ_{res} an der betreffenden Stelle des Stabquerschnittes ist (Erster Satz von L. Prandtl).

Es müssen noch die Randbedingungen längs des Stabquerschnittes

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y} \quad (18)$$

erfüllt werden. Diese Gleichung sagt aus, daß die resultierende Schubspannung τ_{res} in jedem Randpunkt des Querschnittes tangential zur Randkurve $y(x)$ gerichtet ist.

Der zweite Satz von L. Prandtl besagt, daß das Drehmoment M des Stabes gleich dem doppelten Inhalt des von der Spannungsfläche $F(x, y)$ eingeschlossenen Raumes ist. Nach Abb. 2 und Gl. (15) beträgt das Drehmoment

$$M = \iint (y \cdot \tau_{xz} - x \cdot \tau_{yz}) dx dy = \iint \left(y \frac{\partial F}{\partial y} + x \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dy.$$

Der Beweis für $M = 2V$ aus obiger Gleichung findet sich z. B. bei A. und L. Föppl¹⁴ (S. 68).

Die plastische Spannungsfunktion ist bei voll ausgebildetem plastischem Zustand ein Hügel über dem Stabquerschnitt von konstanter Neigung, bei dem das Drehmoment mit Hilfe des eben erwähnten 2. Satzes von Prandtl leicht zu berechnen ist.

IV. Berechnung des Drehmoments.

Das Drehmoment eines Stabes kann mit Hilfe der Gl. (17) und des 2. Satzes von Prandtl ($M = 2V$) leicht berechnet werden, wobei die Form der Spannungsfläche nur noch von der Form des Stabquerschnittes abhängig ist. Es wird hier für nachfolgende vier Querschnittsformen ermittelt.

a) Kreisquerschnitt. Für den Halbmesser r beträgt die Höhe h des Spannungshügels

$$h = r \operatorname{tg} \beta,$$

wobei β den Winkel einer Erzeugenden des Kegels (das ist nämlich die Gestalt des Spannungshügels über dem Kreisquerschnitt) mit der Querschnittsfläche angibt.

Nach Gl. (17) ist nun $\operatorname{tg} \beta = \sigma_z \sqrt{\frac{c}{3}}$ bzw. die Höhe $h = r \cdot \sigma_z \cdot \sqrt{\frac{c}{3}}$.

Damit ergibt sich das Volumen des Kegels zu

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^3 \sigma_z \sqrt{\frac{c}{3}}.$$

Und nach dem 2. Satz von Prandtl ($M = 2V$) folgt für das Drehmoment

$$M = \frac{2}{3} \pi r^3 \sigma_z \sqrt{\frac{c}{3}}. \quad (19)$$

b) Rechteckquerschnitt. Seiten $b > a$.

$$M = \frac{a^3}{6} (3b - a) \sigma_z \sqrt{\frac{c}{3}}. \quad (20)$$

Für den Sonderfall des Quadrates mit $a = b$ lautet

$$M = \frac{a^3}{3} \sigma_z \sqrt{\frac{c}{3}}. \quad (21)$$

c) Kreisringquerschnitt. Bei diesem Querschnitt ist die geneigte Fläche nur über die Ringdicke zu nehmen, während über dem Innenring vom Halbmesser r

¹⁴ A. und L. Föppl: Drang und Zwang, Bd. II, 3. Aufl. Verlag R. Oldenbourg, 1944.

eine ebene Fläche zu spannen ist. Der Spannungshügel ist somit ein Kegelstumpf (s. etwa Föppl¹⁴, S. 79ff.).

$$M = \frac{2}{3} \pi (R^3 - r^3) \sigma_z \sqrt{\frac{c}{3}}. \quad (22)$$

d) Gleichseitiges Dreieck. Seitenlänge a .

$$M = \frac{a^3}{12} \sigma_z \sqrt{\frac{c}{3}}. \quad (23)$$

In diesen Gleichungen sind zwei schon veröffentlichte Sonderfälle von Nadai¹ und Schaden³ enthalten. Mit $c = 1$ ergibt sich der Fall der plastischen Verdrehung eines ideal plastischen Stoffes, und zwar nach der Grenzbedingung von Mises¹² und Hencky¹³. Diesen Fall hat Nadai untersucht. Mit $c = 3$ ergeben sich die Ausdrücke der Verdrehungsfestigkeit spröder Stoffe, die Schaden untersucht hat.

V. Vergleich mit Versuchsergebnissen.

Nachfolgend werden diese theoretischen Ergebnisse mit den aus Versuchen erhaltenen verglichen. Roš und Eichinger¹⁵ haben Verdrehungsversuche an Röhren und vollen Zylinderstäben aus Siemens-Martin-Stahl durchgeführt. Aus dieser Versuchsreihe sind die folgenden Daten entnommen.

a) Hohle Stäbe nach Abb. 13 und 22 von Roš und Eichinger.

α) Bei einer Verzerrung von $3^0/00$ ergibt sich nach Abb. 13

$$\sigma_d = 2717 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_z = 2590 \text{ kg/cm}^2,$$

daraus folgt

$$c = \sigma_d / \sigma_z = 1.049.$$

Der Außenhalbmesser des Rohres betrug $R = 1.5 \text{ cm}$, der Innenhalbmesser $r = 1.25 \text{ cm}$. Damit errechnet sich nach Gl. (22) das Drehmoment

$$M = \frac{2}{3} \pi (1.5^3 - 1.25^3) 2590 \sqrt{\frac{1.049}{3}} = 4560 \text{ kgcm}.$$

Nach Abb. 22 von Roš und Eichinger wurde gemessen

$$M_{T5} = 4500 \text{ kgcm, Unterschied zum theoretischen Ergebnis } - 1.3\%.$$

$$M_{T4} = 4460 \text{ „ „ „ „ „ „ } - 2.2\%.$$

Die gute Übereinstimmung der beiden Ergebnisse von Rechnung und Messung ist darauf zurückzuführen, daß sich schon bei geringer Verzerrung von $3^0/00$ der plastische Zustand über den ganzen, verhältnismäßig dünnen Kreisringquerschnitt ausgebreitet hat. Bei vollen Stäben und geringer Verzerrung ist die Übereinstimmung hingegen noch nicht vorhanden, wie aus nachfolgender lit. b hervorgeht. Eine diesbezügliche Nachprüfung, etwa nach der Ätzmethode von A. Fry¹⁶, liegt nicht vor.

β) Bei einer Verzerrung von $18^0/00$ ergibt sich nach Abb. 13

$$\sigma_d = 3240 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_z = 3110 \text{ kg/cm}^2,$$

daraus folgt

$$c = \sigma_d / \sigma_z = 1.042.$$

Nach Gl. (22) beträgt das Drehmoment

$$M = \frac{2}{3} \pi (1.5^3 - 1.25^3) 3110 \sqrt{\frac{1.042}{3}} = 5460 \text{ kgcm}.$$

Nach Abb. 22 von Roš und Eichinger wurde gemessen

¹⁵ M. Roš und A. Eichinger: Versuche zur Klärung der Bruchgefahr. Bericht Nr. 14 der EMPA, Zürich, 1926. Siehe auch Bericht Nr. 172 der EMPA, Zürich, 1949.

¹⁶ A. Fry: Kruppsche Mh., Juli 1921; Stahl u. Eisen (1921).

$M_{T5} = 4960 \text{ kgcm}$, Unterschied zum theoretischen Ergebnis — 10%.

Die etwas größere Abweichung vom gemessenen Wert ist bedingt durch die zeichnerisch offenbar nicht mehr so exakte Darstellung im betrachteten Bereich.

b) Volle Stäbe nach Abb. 12 und 29 von Roš und Eichinger. Mit Rücksicht auf die Verdrehung, die in Abb. 29 ohne Verfestigungsbereich angegeben ist, wird eine Verzerrung von nur 2‰ in Betracht gezogen. Die entsprechende Druck- bzw. Zugbeanspruchung beträgt

$$\sigma_d = 2690 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_z = 2630 \text{ kg/cm}^2,$$

daraus folgt

$$c = \sigma_d/\sigma_z = 1.023.$$

Der Halbmesser des Stabes T9 betrug $r = 1.5 \text{ cm}$, des Stabes T6 $r = 1.0 \text{ cm}$. Nach

Gl. (19) ergibt sich das Drehmoment für den Stab T9 $M = \frac{2}{3} \pi 1.5^3 \cdot 2630 \sqrt{\frac{1.023}{3}} = 10850 \text{ kgcm}$, für den Stab T6 $M = \frac{2}{3} \pi 1.0^3 \cdot 2630 \sqrt{\frac{1.023}{3}} = 3220 \text{ kgcm}$. Aus

Abb. 29 von Roš und Eichinger wurde gemessen

$M_{T9} = 8470 \text{ kgcm}$, Unterschied zum theoretischen Ergebnis — 28.1%,

$M_{T6} = 2450$ „ „ „ „ „ — 31.4%.

Diese größeren Unterschiede ergeben sich erwartungsgemäß dadurch, daß sich der vollplastische Zustand, der dieser Arbeit zugrunde liegt, wegen der geringen Verzerrung von nur 2‰ noch nicht ganz über den Versuchsstab ausgebreitet hat. Daß die berechneten Werte größer sind als die gemessenen, weist auf die Richtigkeit der Theorie hin.

c) Zum Schluß sollen die gefundenen Gleichungen noch mit neueren Versuchsergebnissen von Roš und Eichinger verglichen werden (s. Anm. 15, Bericht Nr. 172).

In Tabelle VII von Roš und Eichinger sind Versuchsdaten an Gußeisen EK 50 angegeben. Die Druck- bzw. Zugfestigkeit beträgt

$$\sigma_{D10} = 8330 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_{Z1} = 2680 \text{ kg/cm}^2$$

und damit

$$c = \sigma_D/\sigma_Z = 3.11.$$

Nach Gl. (12) ergibt sich die Verdrehungsfestigkeit für $c = 3$

$$\tau_V = \pm \sigma_z \sqrt{\frac{c}{3}} = \pm \sigma_z = 2730 \text{ kg/cm}^2.$$

Nach Tabelle VII von Roš und Eichinger beträgt

$$\tau_V = 2540 \text{ kg/cm}^2, \text{ Unterschied zum theoretischen Ergebnis — } 7.5\%,$$

was eine befriedigende Übereinstimmung ergibt.

In gleicher Weise ist auch die Tabelle I von Roš und Eichinger¹⁵ aufschlußreich. Es wird zunächst die Bruchgrenze der auf Verdrehung beanspruchten Stäbe untersucht und nur jene Zugfestigkeiten σ_z mit den Verdrehungsfestigkeiten τ_V verglichen, bei welchen den großen Bruchdehnungen große Schiebungen entsprechen. So erhält man für Flußstahl in der Spalte τ_V/σ_z folgende Unterschiede:

In der Zeile Nr. 1	+	5%
„ „ „ „ 2	—	4%
„ „ „ „ 3	—	12%
„ „ „ „ 4	—	13%
„ „ „ „ 5	—	9%
„ „ „ „ 6	—	5% usw.

Zu diesen Zahlenwerten, von welchen die meisten brauchbare Übereinstimmung zeigen, ist zu bemerken, daß sie ohne den Beiwert $\sqrt{\frac{c}{3}}$ nach Gl. (12) ermittelt wurden.

Für Chrom-Nickelstahl entnimmt man Tabelle I, Zeile Nr. 23, in der Spalte σ_P die Werte

$$\sigma_D = 8340 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_Z = 7900 \text{ kg/cm}^2,$$

daraus folgt

$$c = \sigma_D / \sigma_Z = 1.056.$$

Nach Gl. (12) ergibt sich die Verdrehungsfestigkeit zu

$$\tau_V = \pm 7900 \sqrt{\frac{1.056}{3}} = \pm 4680 \text{ kg/cm}^2.$$

Gemessen wurde $\tau_P = 4500 \text{ kg/cm}^2$, also mit -4% Unterschied zum theoretischen Ergebnis.

Ebenfalls für Cr-Ni-Stahl entnimmt man Zeile Nr. 29 in der Spalte σ_P die Werte

$$\sigma_D = 7650 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_Z = 7500 \text{ kg/cm}^2,$$

daraus folgt

$$c = \sigma_D / \sigma_Z = 1.02.$$

Nach Gl. (12) ergibt sich die Verdrehungsfestigkeit zu

$$\tau_V = \pm 7500 \sqrt{\frac{1.02}{3}} = \pm 4380 \text{ kg/cm}^2.$$

Gemessen wurde $\tau_P = 4400 \text{ kg/cm}^2$, also mit $+0.5\%$ Unterschied zum theoretischen Ergebnis.

Die Übereinstimmungen zeigen, daß die Grenzbedingung Gl. (6) fähig ist, mit Hilfe der neu eingeführten Zahl $c = \sigma_d / \sigma_z$ als Parameter, die Verdrehungsgrenzbeanspruchungen von der Plastizitätsgrenze bis zur Bruchgrenze zu erfassen.

VI. Der Grenzwinkel und die Spannungen in der Grenzfläche.

Den Grenzwinkel nennt man allgemein Gleit- bzw. Bruchwinkel, die Grenzfläche allgemein Gleit- bzw. Bruchfläche. Nach Torre¹⁷ kann der spitze Grenzwinkel 2α zwischen zwei Grenzflächen, die Normalspannung σ und die Schubspannung τ in diesen Flächen berechnet werden. Wenn die Grenzbedingung als Funktion der Hauptnormalspannung

$$\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3) \quad (24)$$

gegeben ist, dann lauten die vorerwähnten Größen¹⁷

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = d\sigma_1 / d\sigma_3 = \sigma_1' \quad (25)$$

und

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 \sigma_1'}{1 + \sigma_1'}, \quad \tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3 \sigma_1'}{1 + \sigma_1'} \sqrt{\sigma_1'}. \quad (26, 27)$$

Ferner lautet der mathematische Ausdruck für die Belastungsart

$$\sigma_2 = r \sigma_1 + q \sigma_3, \quad r + q = 1. \quad (28)$$

Unter Belastungsart versteht man, wenn eine Art der Beanspruchung (Verdrehung, Zug, Druck usw.) sowohl unter atmosphärischen Verhältnissen durchgeführt wird, als auch unter erhöhtem allseitig gleichem Druck. Zum Beispiel Verdrehung unter

¹⁷ C. Torre: Österr. Ingenieur-Arch. 1, 36 und 316 (1946). Auf Seite 336 dieser Zeitschrift wird darauf hingewiesen, welche physikalische Bedeutung der Winkel 2α und die Spannungen σ und τ haben.

atmosphärischem Druck und unter allseitigem Druck. Das wird Verdrehungsbelastungsart genannt, die sich nach Gl. (28) zu

$$r = q = \frac{1}{2}$$

ergibt. Dann beträgt die mittlere Hauptnormalspannung nach Gl. (28)

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3). \quad (29)$$

Herrschen nur die üblichen atmosphärischen Verhältnisse, welche durch Verschwinden des allseitigen gleichen Druckes ($\sigma_{AD} = 0$) gekennzeichnet sind, so beträgt dann

$$\sigma_2 = \sigma_{AD} = 0 \quad (30)$$

bzw. nach Gl. (29)

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_v.$$

Das verdeutlicht am besten die Mohrsche Darstellung gemäß Abb. 3. Ist $\sigma_2 = \sigma_{AD} < 0$, dann erhält man in Abb. 3 die drei Spannungskreise links vom Ursprung,

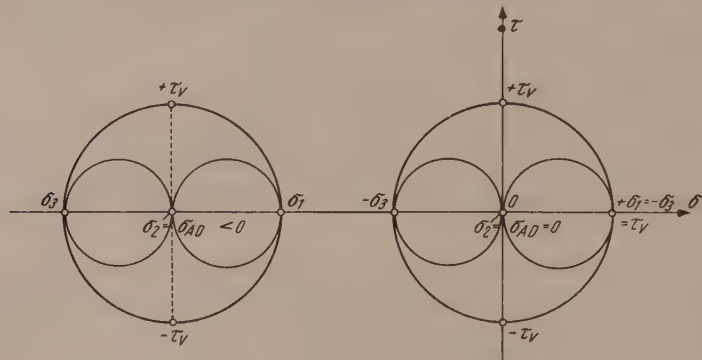


Abb. 3. Zur Verdrehungsbelastungsart bei $\sigma_2 = \sigma_{AD} = 0$ bzw. $\sigma_2 = \sigma_{AD} < 0$.

die den im Ursprung gezeichneten ähnlich oder gleich sind. Es sei noch erwähnt, daß sich nach Gl. (28) die Druckbelastungsart mit $r = 1$, hingegen die Zugbelastungsart mit $r = 0$ ergibt.

Durch Einsetzen von Gl. (28) in Gl. (6) erhält man

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 (1 - r q) + (c - 1) \sigma_z [\sigma_1 (1 + r) + \sigma_3 (1 + q)] = c \sigma_z^2, \quad r + q = 1. \quad (31)$$

Gl. (28) stellt im Koordinatensystem $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$ eine durch die Gerade $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ gehende Ebene dar. Durch eine Änderung der Parameter r und q dreht sich auch diese Ebene um die erwähnte Gerade herum. Wie schon gesagt, stellt Gl. (6) im gleichen Koordinatensystem ein Rotationsparaboloid mit der Hauptachse $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ dar. Man sieht somit, daß die Ebene Gl. (28) das Paraboloid Gl. (6) in Meridianen schneidet. Die Projektion aller dieser Meridiane, die sich durch Änderung der Parameter r und q ergeben, auf die Koordinatenebene (σ_1, σ_3) liefert eben Gl. (31).

Um die Gl. (25) bis (27) auswerten zu können, ist die Kenntnis der ersten Ableitung $\sigma_1' = d\sigma_1/d\sigma_3$ erforderlich, die sich aus Gl. (31) ergibt zu

$$\sigma_1' = \frac{d\sigma_1}{d\sigma_3} = \frac{2 (\sigma_1 - \sigma_3) (1 - r q) - (c - 1) \sigma_z (1 + q)}{2 (\sigma_1 - \sigma_3) (1 - r q) + (c - 1) \sigma_z (1 + r)}, \quad r + q = 1. \quad (32)$$

Wie erwähnt, ergibt sich die Verdrehungsbelastungsart für $r = q = \frac{1}{2}$ bzw. für $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \sigma_m$. Die reine Verdrehung folgt dann aus $\sigma_2 = 0$ bzw. nach Gl. (11) und (12) aus $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_v = \pm \sigma_z \sqrt{\frac{c}{3}}$. Daraus ergibt sich nach Gl. (25) und (32)

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \sigma_1' = \frac{2\sqrt{\frac{c}{3} - (c-1)}}{2\sqrt{\frac{c}{3} + (c-1)}} \quad (33)$$

Aus Gl. (26), (27) und (33) bestimmen sich nun die Spannungen in der Gleit- bzw. Bruchfläche zu

$$\sigma = \frac{c-1}{2} \cdot \sigma_z, \quad \tau = \pm \frac{1}{2} \sigma_z \sqrt{\frac{4}{3}c - (c-1)^2}. \quad (34, 35)$$

Man sieht, daß für $c = 1$ nach Gl. (33) $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$ bzw. der Grenzwinkel (zwischen zwei Grenzflächen) $2\alpha = 90^\circ$ ist. Bei dem vorliegenden idealplastischen Stoff betragen die Spannungen in der Grenzfläche nach Gl. (34), (35)

$$\sigma = 0, \quad \tau = \pm \frac{\sigma_z}{\sqrt{3}}.$$

Das ist die bekannte maximale Schubspannung nach der sog. Gestaltänderungstheorie.

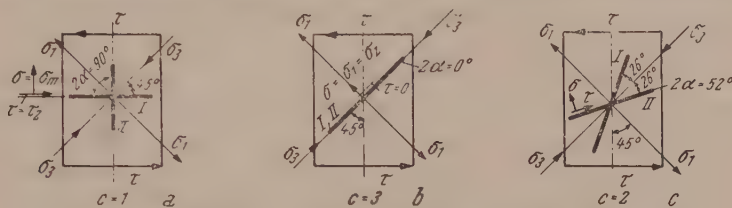


Abb. 4. Gleitlinien bei verschiedenen Werten $c = 1, 2, 3$.

Ein zweiter Sonderfall ergibt sich für $c = 3$. Hier beträgt der Bruchwinkel $\operatorname{tg}^2 \alpha = 0$ bzw. $2\alpha = 0$. Dieses Ergebnis besagt, daß es sich hier um den Trennbruch handelt. Die Spannungen lauten dann erwartungsgemäß

$$\sigma = \sigma_z, \quad \tau = 0,$$

was auch der Beanspruchung beim Trennbruch entspricht. Abb. 4a und 4b veranschaulichen diesen Zustand. Die Gleitlinien I, II in Abb. 4a sind bekanntlich Hauptschubspannungstrajektorien, während die Bruchfläche in Abb. 4b zur Zugspannung σ_1 senkrecht steht, so daß $\sigma = \sigma_1$, das heißt, daß die Normalspannung in der Gleitfläche gleich der Hauptnormalspannung ist.

Ein allgemeiner Fall ergibt sich für $c = 2$ bzw. nach Gl. (33) $2\alpha = 52^\circ$, s. Abb. 4c. Dort befindet sich die Lage der Gleitlinien zwischen dem idealplastischen Fall ($c = 1$, $2\alpha = 90^\circ$) und dem spröden Fall ($c = 3$, $2\alpha = 0$).

(Eingegangen am 2. Juli 1953.)

Zur Schwingungstilgung bei Sternmotoren.

Von A. Slibar und K. Desoyer.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit werden die Verdrehungen einer elastischen Welle untersucht, die mit Pendeltilgern ausgestattete rotierende Massen verbindet. Diese Massen stehen im allgemeinsten Fall unter der Einwirkung von Störmomenten beliebiger Kreisfrequenzen. Die Tilger werden dabei als physikalische Pendel eingeführt, die Welle wird als elastisches Kontinuum behandelt.

Im weiteren wird die Spezialisierung für den häufigsten Anwendungsfall, den Sternmotor mit Luftschraube, vorgenommen und die nach Tilgung des Einflusses einer bestimmten ausgewählten Störfrequenz verbleibende Torsion der Welle untersucht. Ein beigelegtes Diagramm erlaubt die Bestimmung der Wirkungen der übrigen Störfrequenzen auf die Welle.

Summary. The paper under review deals with the deformations caused by the twisting of an elastic shaft, connecting rotating masses, provided with oscillating absorbers. In the most general case these masses are acted upon by moments of derangement of cyclic frequencies of any kind. In this connexion the absorbers are introduced as physical pendulums, whereas the shaft is treated as a continuous, elastic body.

Further, the author concentrates on the mode of application, most frequently occurring, viz. the star motor with the air propeller, whereby the torsion of the shaft is examined remaining after the absorption of the influence of a specified, selected derangement frequency. A graph adjoined permits of determining the effects on the shaft of the remaining frequencies of derangement.

Résumé. Cet ouvrage traite du problème des déformations d'un arbre élastique dues aux torsions, arbre dont on se sert pour joindre des masses rotatoires munies de dispositifs à absorption pendulaire. Dans le cas le plus général ces masses se trouvent sous l'influence de moments de dérangement (perturbation) de fréquences cycliques quelconques. Les dispositifs d'absorption sont introduits sous la forme de pendules physiques, tandis que l'arbre est traité comme représentant une continuité élastique.

Puis l'auteur se concentre sur le cas d'application le plus fréquent, c'est à dire sur le moteur à étoile avec hélice, pour examiner la torsion de l'arbre restant après l'absorption de l'influence d'une fréquence choisie de dérangement spécifique. Le diagramme joint au traité permet de déterminer les effets sur l'arbre des fréquences de dérangement restantes.

I. Einleitung.

Zur Begrenzung der Torsion der Kurbelwelle bei Systemen Sternmotor-Luftschraube werden häufig Pendelschwingungstilger verwendet¹. Nach den einführenden Arbeiten von E. S. Taylor², O. Kraemer³, W. Schick⁴, A. Kimmel und I. Lutzweiler⁵ ist bei dem als mathematisches Pendel aufgefaßten Tilger zur Beseitigung des Einflusses der Grundfrequenz der erregenden Störmomente die als Abstimmbedingung bekannte Beziehung

$$\Omega^2 = \frac{L}{l} \omega_0^2 \quad (1)$$

einzuhalten. Darin bedeuten Ω die Kreisfrequenz des erregenden Störmomentes, L die Entfernung des Anlenkpunktes des Pendels von der Drehachse der rotierenden Masse, ω_0 die mittlere Winkelgeschwindigkeit der umlaufenden Massen und l die Länge des Pendels. Die Beziehung (1) nimmt die einfachere Form

$$\frac{L}{l} = k^2 \quad (1')$$

an, wenn die Kreisfrequenz Ω des erregenden Momentes als ein k -faches der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω_0 eingeführt wird. Erst die nichtlinearisierte Behandlung des Tilgers an einer Drehmasse liefert, wie von den Verfassern gezeigt wurde⁶, Aussagen über die Größe der günstigsten Masse des Pendelkörpers.

In der vorliegenden Arbeit soll die Behandlung von Systemen mit Fliehkrafttilgern bei Berücksichtigung der als elastisches Kontinuum aufgefaßten Welle durchgeführt werden. Während bei der nichtlinearisierten Behandlung des Tilgers die Forderung nach möglichst gleichförmigem Lauf des gesamten Systems unter dem Einfluß einer einzigen Erregerfrequenz im Vordergrund stand, wird hier weitgehende Verkleinerung der Verdrehungsbeanspruchung der Kurbelwelle angestrebt. Von möglichst allgemeinen Bedingungen ausgehend, soll dabei im Verlaufe der Rechnung auf den Sternmotor mit Luftschraube spezialisiert werden.

¹ Zum Beispiel H. Schrön: Die Dynamik der Verbrennungskraftmaschine. Wien: Springer-Verlag. 1947. — K. Haug: Die Drehschwingungen in Kolbenmaschinen. Berlin: Springer-Verlag. 1952.

² E. S. Taylor: J. Soc. automot. Engr. 38, 81 (1936).

³ O. Kraemer: Z. Ver. dtsh. Ing. 82, 1297 (1938); 83, 901 (1939); Motortech. Z. 1, 3 (1939).

⁴ W. Schick: Ingenieur-Arch. 10, 303 (1939).

⁵ A. Kimmel und I. Lutzweiler: Ingenieur-Arch. 12, 100 (1941).

⁶ K. Desoyer und A. Slibar: Ingenieur-Arch. 21, 208 (1953); 22 (1954).

⁷ Der Einfluß der Schwerkraft wird wie üblich nicht berücksichtigt.

Darin bedeutet T_1 bzw. T_2 die kinetische Energie der betreffenden Masse mit angelenktem Pendel. In den Gl. (6a) und (7a) stellt der jeweils letzte Term das von der Welle auf die Masse „1“ bzw. „2“ übertragene Drehmoment dar.

Führt man in die Gl. (3) zur Ermittlung der stehenden Wellen den Ansatz

$$\psi(z, t) = Z(z) \cdot e^{i k \omega_0 t} \quad (8)$$

ein, so ergibt sich

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = - \frac{k^2 \omega_0^2}{u^2} Z \quad (9)$$

mit der Lösung

$$\psi(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin k \omega_0 t + B_k \cos k \omega_0 t) \left(\sin \frac{k \omega_0}{u} z + C_k \cos \frac{k \omega_0}{u} z \right) + \omega_0 t + \kappa z. \quad (10)$$

Die beiden angefügten partikulären Lösungen berücksichtigen die konstante mittlere Rotation der Anordnung und die rein statische Verdrehung der Welle unter der Belastung mit den konstanten Anteilen der Momente. κ ist eine noch zu ermittelnde Konstante. Die für die beiden letzten Terme der Gl. (6a) bzw. (7a) benötigten Ausdrücke ergeben sich aus (10) zu

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \omega_0}{u} (A_k \sin k \omega_0 t + B_k \cos k \omega_0 t) + \kappa, \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=l} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \omega_0}{u} (A_k \sin k \omega_0 t + B_k \cos k \omega_0 t) \left(\cos \frac{k \omega_0}{u} l - C_k \sin \frac{k \omega_0}{u} l \right) + \kappa. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die kinetische Energie T_1 der Masse „1“ mit angelenktem Pendel lautet:

$$T_1 = \frac{\mathfrak{J}_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_1}{2} v_{S_1}^2 + \frac{m_1}{2} i_{S_1}^2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\vartheta}_1)^2. \quad (12)$$

Aus den Koordinaten x_{S_1} und y_{S_1} des Pendelschwerpunktes in dem nicht mitrotierenden Koordinatensystem der Abb. 1

$$x_{S_1} = L_1 \cos \varphi_1 + s_1 \cos (\varphi_1 + \vartheta_1),$$

$$y_{S_1} = L_1 \sin \varphi_1 + s_1 \sin (\varphi_1 + \vartheta_1)$$

erhält man das Quadrat der Absolutgeschwindigkeit v_{S_1} des Pendelschwerpunktes

$$\begin{aligned} v_{S_1}^2 &= \dot{x}_{S_1}^2 + \dot{y}_{S_1}^2 = [L_1^2 + s_1^2 + 2 L_1 s_1 \cos \vartheta_1] \dot{\varphi}_1^2 + s_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \\ &+ 2 s_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\vartheta}_1 + 2 L_1 s_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Damit folgt aus (12) und (13)

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\mathfrak{J}_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_1}{2} [L_1^2 + s_1^2 + 2 L_1 s_1 \cos \vartheta_1] \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_1}{2} s_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + m_1 s_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\vartheta}_1 + \\ &+ m_1 L_1 s_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1 + \frac{m_1}{2} i_{S_1}^2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\vartheta}_1)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Die kinetische Energie T_2 der Masse „2“ mit angelenktem Pendel erhält man, wenn man in (14) den Index 1 gegen den Index 2 austauscht.

Durch Einsetzen von T_1 bzw. T_2 und deren Ableitungen sowie der Ausdrücke (2) und (11) in die Beziehungen (6a), (6b), (7a) und (7b) erhält man

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{J}_1 + m_1 L_1^2 + 2 m_1 L_1 s_1 \cos \vartheta_1) \ddot{\varphi}_1 + m_1 (s_1^2 + i_{S_1}^2) (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\vartheta}_1) - \\ &- 2 m_1 L_1 s_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\vartheta}_1 \sin \vartheta_1 - m_1 L_1 s_1 \dot{\vartheta}_1^2 \sin \vartheta_1 + \\ &+ m_1 L_1 s_1 \ddot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1 = M_{10} + \sum_{k=1}^p (M_{1k} \sin k \varphi_1 + M_{1k}^* \cos k \varphi_1) + \\ &+ \frac{\pi}{2} G a^4 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \omega_0}{u} (A_k \sin k \omega_0 t + B_k \cos k \omega_0 t) + \kappa \right], \end{aligned} \quad (15a)$$

$$(s_1^2 + i_{s_1}^2) (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\vartheta}_1) + L_1 s_1 (\ddot{\varphi}_1 \cos \vartheta_1 + \dot{\varphi}_1^2 \sin \vartheta_1) = 0, \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{S}_2 + m_2 L_2^2 + 2 m_2 L_2 s_2 \cos \vartheta_2) \ddot{\varphi}_2 + m_2 (s_2^2 + i_{s_2}^2) (\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\vartheta}_2) - \\ & - 2 m_2 L_2 s_2 \dot{\varphi}_2 \dot{\vartheta}_2 \sin \vartheta_2 - m_2 L_2 s_2 \dot{\vartheta}_2^2 \sin \vartheta_2 + \\ & + m_2 L_2 s_2 \ddot{\vartheta}_2 \cos \vartheta_2 = M_{20} + \sum_{k=1}^p (M_{2k} \sin k \varphi_2 + M_{2k}^* \cos k \varphi_2) - \end{aligned} \quad (16a)$$

$$- \frac{\pi}{2} G a^4 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \omega_0}{u} (A_k \sin k \omega_0 t + B_k \cos k \omega_0 t) \left(\cos \frac{k \omega_0}{u} l - C_k \sin \frac{k \omega_0}{u} l \right) + \varkappa \right],$$

$$(s_2^2 + i_{s_2}^2) (\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\vartheta}_2) + L_2 s_2 (\ddot{\varphi}_2 \cos \vartheta_2 + \dot{\varphi}_2^2 \sin \vartheta_2) = 0. \quad (16b)$$

Wir setzen zur Linearisierung obiger Gleichungen voraus, daß die relativen Aus Schlagwinkel ϑ_1 und ϑ_2 klein bleiben. Die obigen Gleichungen nehmen dann die Form an:

$$(\mathfrak{S}_1 + m_1 L_1^2 + 2 m_1 L_1 s_1) \ddot{\varphi}_1 + m_1 (s_1^2 + i_{s_1}^2) (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\vartheta}_1) + m_1 L_1 s_1 \ddot{\vartheta}_1 = \dots, \quad (15a')$$

$$(s_1^2 + i_{s_1}^2) (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\vartheta}_1) + L_1 s_1 (\ddot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1^2 \vartheta_1) = 0, \quad (15b')$$

$$(\mathfrak{S}_2 + m_2 L_2^2 + 2 m_2 L_2 s_2) \ddot{\varphi}_2 + m_2 (s_2^2 + i_{s_2}^2) (\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\vartheta}_2) + m_2 L_2 s_2 \ddot{\vartheta}_2 = \dots, \quad (16a')$$

$$(s_2^2 + i_{s_2}^2) (\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\vartheta}_2) + L_2 s_2 (\ddot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2 \vartheta_2) = 0. \quad (16b')$$

III. Auswertung der Bewegungsgleichungen.

Zerlegt man die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$ und $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$ in den konstanten Anteil ω_0 und die Störung $\Delta\omega_1$ bzw. $\Delta\omega_2$, schreibt also

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 + \Delta\omega_1, \\ \omega_2 &= \omega_0 + \Delta\omega_2, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

dann sind für stationären Lauf der Anordnung wegen $\dot{\omega}_0 = 0$ die Größen ω_1 bzw. ω_2 durch $\Delta\omega_1$ bzw. $\Delta\omega_2$ zu ersetzen.

Wir führen die dimensionslosen Größen

$$\left. \begin{aligned} \frac{s_\nu^2 + i_{s_\nu}^2}{L_\nu s_\nu} &= \lambda_\nu, \quad \frac{s_\nu}{L_\nu} = \sigma_\nu, \quad \frac{m_\nu L_\nu^2}{\mathfrak{S}_\nu} = \Theta_\nu, \quad \frac{M_{\nu 0}}{\mathfrak{S}_\nu \omega_0^2} = K_{\nu 0}, \\ \frac{M_{\nu k}}{\mathfrak{S}_\nu \omega_0^2} &= K_{\nu k}, \quad \frac{M_{\nu k}^*}{\mathfrak{S}_\nu \omega_0^2} = K_{\nu k}^* \quad (k = 1, 2, \dots, p), \\ \frac{\frac{\pi}{2} G a^4}{\mathfrak{S}_\nu \omega_0^2} &= A_\nu, \quad \omega_0 t = \tau \quad (\nu = 1 \text{ oder } 2) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ein und kennzeichnen die Ableitung nach τ durch einen Strich. Mit der Zerlegung (17) und den Abkürzungen (18) gehen die Gl. (15a'), (15b'), (16a') und (16b') über in:

$$(1 + \Theta_1 + \Theta_1 \sigma_1 \lambda_1 + 2 \Theta_1 \sigma_1) \frac{\Delta\omega_1'}{\omega_0} + \Theta_1 \sigma_1 (\lambda_1 + 1) \vartheta_1'' =$$

$$= K_{10} + \sum_{k=1}^p (K_{1k} \sin k \tau + K_{1k}^* \cos k \tau) + A_1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \omega_0}{u} (A_k \sin k \tau + B_k \cos k \tau) + \varkappa \right], \quad (15a'')$$

$$\frac{\Delta\omega_1'}{\omega_0} = - \frac{\lambda_1 \vartheta_1'' + \vartheta_1}{\lambda_1 + 1}, \quad (15b'')$$

$$\begin{aligned} & (1 + \Theta_2 + \Theta_2 \sigma_2 \lambda_2 + 2 \Theta_2 \sigma_2) \frac{\Delta\omega_2'}{\omega_0} + \Theta_2 \sigma_2 (\lambda_2 + 1) \vartheta_2'' = \\ & = K_{20} + \sum_{k=1}^p (K_{2k} \sin k \tau + K_{2k}^* \cos k \tau) - \end{aligned} \quad (16a'')$$

$$- \Lambda_2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \omega_0}{u} (A_k \sin k \tau + B_k \cos k \tau) \left(\cos \frac{k \omega_0}{u} l - C_k \sin \frac{k \omega_0}{u} l \right) + \kappa \right],$$

$$\frac{\Delta \omega_2'}{\omega_0} = - \frac{\lambda_2 \vartheta_2'' + \vartheta_2}{\lambda_2 + 1}, \quad (16b'')$$

wobei wie üblich die Größe $\Delta \omega_v$ in der Kombination $(\omega_0 + \Delta \omega_v)$ gegen ω_0 gestrichen wurde. Setzt man (15b'') in (15a'') und (16b'') in (16a'') ein, so erhält man zwei Differentialgleichungen für ϑ_1 und ϑ_2 :

$$a_1 \vartheta_1'' + b_1 \vartheta_1 = K_{10} + \Lambda_1 \kappa + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(K_{1k} + \Lambda_1 \frac{k \omega_0}{u} A_k \right) \sin k \tau + \left(K_{1k}^* + \Lambda_1 \frac{k \omega_0}{u} B_k \right) \cos k \tau \right], \quad (19a)$$

$$a_2 \vartheta_2'' + b_2 \vartheta_2 = K_{20} - \Lambda_2 \kappa + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[K_{2k} - \Lambda_2 \frac{k \omega_0}{u} A_k \left(\cos \frac{k \omega_0}{u} l - C_k \sin \frac{k \omega_0}{u} l \right) \right] \sin k \tau + \left[K_{2k}^* - \Lambda_2 \frac{k \omega_0}{u} B_k \left(\cos \frac{k \omega_0}{u} l - C_k \sin \frac{k \omega_0}{u} l \right) \right] \cos k \tau \right\} \quad (19b)$$

mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} a_v &= [\Theta_v \sigma_v - \lambda_v (1 + \Theta_v)] \cdot \frac{1}{\lambda_v + 1}, \\ b_v &= - [1 + \Theta_v + \Theta_v \sigma_v (\lambda_v + 2)] \cdot \frac{1}{\lambda_v + 1} \quad (v = 1 \text{ oder } 2). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Die für den uns hier ausschließlich interessierenden stationären Vorgang gültigen partikulären Lösungen lauten

$$\vartheta_1 = \frac{K_{10} + \Lambda_1 \kappa}{b_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{K_{1k} + \Lambda_1 \frac{k \omega_0}{u} A_k}{b_1 - k^2 a_1} \sin k \tau + \frac{K_{1k}^* + \Lambda_1 \frac{k \omega_0}{u} B_k}{b_1 - k^2 a_1} \cos k \tau \right], \quad (21a)$$

$$\vartheta_2 = \frac{K_{20} - \Lambda_2 \kappa}{b_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{K_{2k} + \Lambda_2 \frac{k \omega_0}{u} A_k \left(C_k \sin \frac{k \omega_0}{u} l - \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right)}{b_2 - k^2 a_2} \sin k \tau + \frac{K_{2k}^* + \Lambda_2 \frac{k \omega_0}{u} B_k \left(C_k \sin \frac{k \omega_0}{u} l - \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right)}{b_2 - k^2 a_2} \cos k \tau \right]. \quad (21b)$$

Setzt man (21a) und (21b) in (15b'') und (16b'') ein, so erhält man

$$\frac{\Delta \omega_1'}{\omega_0} = - \frac{1}{\lambda_1 + 1} \left\{ \frac{K_{10} + \Lambda_1 \kappa}{b_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - k^2 \lambda_1}{b_1 - k^2 a_1} \left[\left(K_{1k} + \Lambda_1 \frac{k \omega_0}{u} A_k \right) \sin k \tau + \left(K_{1k}^* + \Lambda_1 \frac{k \omega_0}{u} B_k \right) \cos k \tau \right] \right\} \quad (22a)$$

und

$$\frac{\Delta \omega_2'}{\omega_0} = - \frac{1}{\lambda_2 + 1} \left\{ \frac{K_{20} - \Lambda_2 \kappa}{b_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - k^2 \lambda_2}{b_2 - k^2 a_2} \left\{ \left[K_{2k} + \Lambda_2 \frac{k \omega_0}{u} A_k \left(C_k \sin \frac{k \omega_0}{u} l - \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right) \right] \sin k \tau + \left[K_{2k}^* + \Lambda_2 \frac{k \omega_0}{u} B_k \left(C_k \sin \frac{k \omega_0}{u} l - \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right) \right] \cos k \tau \right\} \right\}. \quad (22b)$$

Zur Erfüllung der Randbedingungen (5) bilden wir gemäß (10)

$$\psi_{z=0} \equiv \varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin k \omega_0 t + B_k \cos k \omega_0 t) C_k + \omega_0 t, \quad (23a)$$

$$\psi_{z=l} \equiv \varphi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin k \omega_0 t + B_k \cos k \omega_0 t) \left(\sin \frac{k \omega_0}{u} l + C_k \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right) + \omega_0 t + \kappa l, \quad (23b)$$

woraus sich durch Differentiation nach t die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 ergeben und daraus durch Ableiten nach τ und Division durch ω_0

$$\frac{\omega_1'}{\omega_0} \equiv \frac{\Delta \omega_1'}{\omega_0} = - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (A_k \sin k \tau + B_k \cos k \tau) C_k \quad (24a)$$

und

$$\frac{\omega_2'}{\omega_0} \equiv \frac{\Delta \omega_2'}{\omega_0} = - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (A_k \sin k \tau + B_k \cos k \tau) \left(\sin \frac{k \omega_0}{u} l + C_k \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right). \quad (24b)$$

Wir setzen die Ausdrücke (22a) und (24a) gleich, ebenso die Ausdrücke (22b) und (24b), und führen den Koeffizientenvergleich durch. Der Vergleich der Konstanten liefert

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} K_{10} + A_1 \kappa &= 0 \\ K_{20} - A_2 \kappa &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ein Ergebnis, das man auch sofort aus den Gl. (22a) und (22b) schließen könnte, da $\Delta \omega_1'$ und $\Delta \omega_2'$ für stationären Lauf kein konstantes Glied besitzen können. Da für stationären Lauf die Beziehung

$$M_{10} + M_{20} = 0 \quad (26)$$

gelten muß, so ergeben die beiden Gl. (25) mit (18):

$$\kappa = - \frac{2 M_{10}}{\pi G a^4}. \quad (27)$$

Die Konstante κ stellt den Verdrehungswinkel der Längeneinheit der Welle bei statischer Belastung durch die konstanten Endmomente M_{10} und $M_{20} = -M_{10}$ dar.

Der Vergleich der Koeffizienten der Winkelfunktionen liefert die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1 + 1} \cdot \frac{1 - k^2 \lambda_1}{b_1 - k^2 a_1} \left(K_{1k} + A_1 \frac{k \omega_0}{u} A_k \right) &= k^2 A_k C_k, \\ \frac{1}{\lambda_2 + 1} \cdot \frac{1 - k^2 \lambda_2}{b_2 - k^2 a_2} \left[K_{2k} + A_2 \frac{k \omega_0}{u} A_k \left(C_k \sin \frac{k \omega_0}{u} l - \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right) \right] &= \\ &= k^2 A_k \left(\sin \frac{k \omega_0}{u} l + C_k \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1 + 1} \cdot \frac{1 - k^2 \lambda_1}{b_1 - k^2 a_1} \left(K_{1k}^* + A_1 \frac{k \omega_0}{u} B_k \right) &= k^2 B_k C_k, \\ \frac{1}{\lambda_2 + 1} \cdot \frac{1 - k^2 \lambda_2}{b_2 - k^2 a_2} \left[K_{2k}^* + A_2 \frac{k \omega_0}{u} B_k \left(C_k \sin \frac{k \omega_0}{u} l - \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right) \right] &= \\ &= k^2 B_k \left(\sin \frac{k \omega_0}{u} l + C_k \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Aus den beiden Gl. (28) bestimmen sich A_k und $A_k \cdot C_k$, aus den beiden Gl. (29) ebenso B_k und $B_k \cdot C_k$.

IV. Die Verdrehung der Welle.

Der klein zu haltende Ausdruck $(\varphi_2 - \varphi_1)$, der ein Maß für die Verdrehungsbeanspruchung der Welle darstellt, ergibt sich aus (23a) und (23b):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sum_{k=1}^p (\Gamma_k \sin k \omega_0 t + \Gamma_k^* \cos k \omega_0 t) + \kappa l \quad (30)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_k &= A_k \sin \frac{k \omega_0}{u} l - A_k C_k \left(1 - \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right), \\ \Gamma_k^* &= B_k \sin \frac{k \omega_0}{u} l - B_k C_k \left(1 - \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Setzt man die aus (28) und (29) ermittelten Konstanten A_k , $A_k C_k$ und B_k , $B_k C_k$ in (31) ein, so folgen die Amplituden des gesamten relativen Verdrehungswinkels der Welle zu:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_k &= \frac{1}{D} \left\{ \frac{1 - k^2 \lambda_1}{(\lambda_1 + 1)(b_1 - k^2 a_1)} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \frac{1 - k^2 \lambda_2}{(\lambda_2 + 1)(b_2 - k^2 a_2)} \left(1 - \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right) \frac{k \omega_0}{u} (A_2 K_{1k} - A_1 K_{2k}) - \\ &\quad \left. - k^2 \sin \frac{k \omega_0}{u} l \left[\frac{1 - k^2 \lambda_1}{(\lambda_1 + 1)(b_1 - k^2 a_1)} K_{1k} - \frac{1 - k^2 \lambda_2}{(\lambda_2 + 1)(b_2 - k^2 a_2)} K_{2k} \right] \right\}, \\ \Gamma_k^* &= \frac{1}{D} \left\{ \frac{1 - k^2 \lambda_1}{(\lambda_1 + 1)(b_1 - k^2 a_1)} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \frac{1 - k^2 \lambda_2}{(\lambda_2 + 1)(b_2 - k^2 a_2)} \left(1 - \cos \frac{k \omega_0}{u} l \right) \frac{k \omega_0}{u} (A_2 K_{1k}^* - A_1 K_{2k}^*) - \\ &\quad \left. - k^2 \sin \frac{k \omega_0}{u} l \left[\frac{1 - k^2 \lambda_1}{(\lambda_1 + 1)(b_1 - k^2 a_1)} K_{1k}^* - \frac{1 - k^2 \lambda_2}{(\lambda_2 + 1)(b_2 - k^2 a_2)} K_{2k}^* \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

mit

$$\begin{aligned} D &= \frac{1 - k^2 \lambda_1}{(\lambda_1 + 1)(b_1 - k^2 a_1)} A_1 \frac{k \omega_0}{u} \left[k^2 \cos \frac{k \omega_0}{u} l - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - k^2 \lambda_2}{(\lambda_2 + 1)(b_2 - k^2 a_2)} A_2 \frac{k \omega_0}{u} \sin \frac{k \omega_0}{u} l \right] + k^2 \left[\frac{1 - k^2 \lambda_2}{(\lambda_2 + 1)(b_2 - k^2 a_2)} A_2 \frac{k \omega_0}{u} \cos \frac{k \omega_0}{u} l + \right. \\ &\quad \left. + k^2 \sin \frac{k \omega_0}{u} l \right]. \quad (k = 1, 2, 3 \dots p). \end{aligned} \quad (33)$$

Aus (32) ist folgendes zu ersehen: wirkt an der Masse „1“ nur eine Störfrequenz k' und an der Masse „2“ nur eine Störfrequenz k'' , so werden die Amplituden $\Gamma_{k'}$, $\Gamma_{k'}^*$, $\Gamma_{k''}$ und $\Gamma_{k''}^*$ zu Null, wenn man die beiden Abstimmbedingungen

$$1 - k'^2 \lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad 1 - k''^2 \lambda_2 = 0$$

einhält⁸.

V. Spezialisierung für den Sternmotor.

Von Interesse für die Anwendung wird der einfacher zu übersehende Spezialfall sein, der durch die Verbindung eines Sternmotors mit Tilger und einer anzutreibenden Luftschraube unter Zwischenschaltung einer elastischen Welle entsteht. Für diesen Fall vereinfachen sich die Gl. (32) unter Beachtung von

$$\begin{aligned} K_{2k} &= K_{2k}^* = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \\ m_2 &= 0, \\ i_{S_2} &= 0 \quad \text{und} \quad \frac{1 - k^2 \lambda_2}{(\lambda_2 + 1)(b_2 - k^2 a_2)} = 1 \end{aligned} \quad (34)$$

⁸ In diesem Fall ist: $K_{1k} = K_{1k}^* = 0$ für $k \neq 0, \neq k'$,
 $K_{2k} = K_{2k}^* = 0$ für $k \neq 0, \neq k''$.

zu

$$\Gamma_k = -\frac{K_{1k}(1-k^2\lambda_1)}{D'(\lambda_1+1)(b_1-k^2a_1)} \left[\left(1 - \cos \frac{k\omega_0}{u} l\right) \frac{k\omega_0}{u} A_2 + k^2 \sin \frac{k\omega_0}{u} l \right] \quad (35)$$

mit

$$D' = \frac{1-k^2\lambda_1}{(\lambda_1+1)(b_1-k^2a_1)} A_1 \frac{k\omega_0}{u} \left[A_2 \frac{k\omega_0}{u} \sin \frac{k\omega_0}{u} l + k^2 \cos \frac{k\omega_0}{u} l \right] - \\ - k^2 \left[A_2 \frac{k\omega_0}{u} \cos \frac{k\omega_0}{u} l - k^2 \sin \frac{k\omega_0}{u} l \right]. \quad (36)$$

Aus der Gl. (35) folgt sofort die Amplitude Γ_k^* durch Ersatz von K_{1k} durch K_{1k}^* .

Durch Erfüllen der bekannten, aus Gl. (35) ersichtlichen ersten Abstimmbedingung

$$1 - \bar{k}^2 \lambda_1 = 0, \quad \text{das heißt} \quad \frac{s_1^2 + i_{s_1}^2}{L_1 s_1} = \frac{1}{\bar{k}^2} \quad (37)$$

lassen sich die durch die Erregerfrequenz \bar{k} hervorgerufenen Torsionen der Welle beseitigen, da dadurch sowohl $\Gamma_{\bar{k}}$ als auch $\Gamma_{\bar{k}}^*$ zu Null werden. Wir setzen nun für die weiteren Betrachtungen voraus, daß die Bedingung (37) für eine ausgewählte Ordnung \bar{k} erfüllt sei und beschäftigen uns im weiteren mit den durch die restlichen Erregerfrequenzen $k \neq \bar{k}$ hervorgerufenen Torsionen der Welle. Im betrachteten Falle werden die bezogenen Amplituden der noch auftretenden Relativverdrehungen der Welle

$$\frac{\Gamma_k(\bar{k})}{K_{1k}} = \frac{\Gamma_k^*(\bar{k})}{K_{1k}^*} = -\frac{1}{X_k + Y_k [1 + \Theta_1 (1 + \sigma_1 Z_k(\bar{k}))]} \quad (38)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} X_k &= \frac{A_1 \frac{\omega_0}{u} \left[A_2 \frac{k\omega_0}{u} \sin \frac{k\omega_0}{u} l + k^2 \cos \frac{k\omega_0}{u} l \right]}{A_2 \frac{\omega_0}{u} \left(1 - \cos \frac{k\omega_0}{u} l \right) + k \sin \frac{k\omega_0}{u} l}, \\ Y_k &= \frac{A_2 \frac{k\omega_0}{u} \cos \frac{k\omega_0}{u} l - k^2 \sin \frac{k\omega_0}{u} l}{A_2 \frac{\omega_0}{u} \left(1 - \cos \frac{k\omega_0}{u} l \right) + k \sin \frac{k\omega_0}{u} l} \cdot k \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

und

$$Z_k(\bar{k}) = \frac{\bar{k}^2 (k^2 + 2) + 1}{\bar{k}^2 - k^2}. \quad (40)$$

Bei den Gren Γ_k , Γ_k^* und Z_k soll der obere Index die Voraussetzung der Erfüllung der Abstimmbedingung (37) ausdrücken.

Die Amplitude $W_k(\bar{k})$ der von der Erregung mit der Ordnung k verbleibenden Relativausschlge der Welle läßt sich damit in der Form

$$W_k(\bar{k}) = \sqrt{\Gamma_k^2(\bar{k}) + \Gamma_k^{*2}(\bar{k})} \quad (41)$$

schreiben, woraus mit Benützung von Gl. (38) folgt

$$W_k(\bar{k}) \frac{(X_k + Y_k)}{\sqrt{K_{1k}^2 + K_{1k}^{*2}}} = \frac{1}{1 + \frac{Y_k}{X_k + Y_k} \Theta_1 (1 + \sigma_1 Z_k(\bar{k}))}. \quad (42)$$

Die linke Seite von Gl. (42) läßt sich nun in einem Schichtendiagramm (Abb. 2) als Funktion der noch frei wählbaren Parameter σ_1 , Θ_1 und der dimensionslosen Parameter X_k und Y_k , welche die Daten der Anordnung, die mittlere Winkelgeschwindigkeit ω_0 und die zu untersuchende Ordnung k enthalten, darstellen. Die Bezifferung an den Schichtenlinien der Abb. 2 bedeutet den jeweiligen Wert der Größe nach Gl. (42).

Im Rahmen der konstruktiven Möglichkeiten kann nun die günstigste Kombination von σ_1 und Θ_1 für eine gewünschte Betriebsdrehzahl und die betrachtete Ordnung k

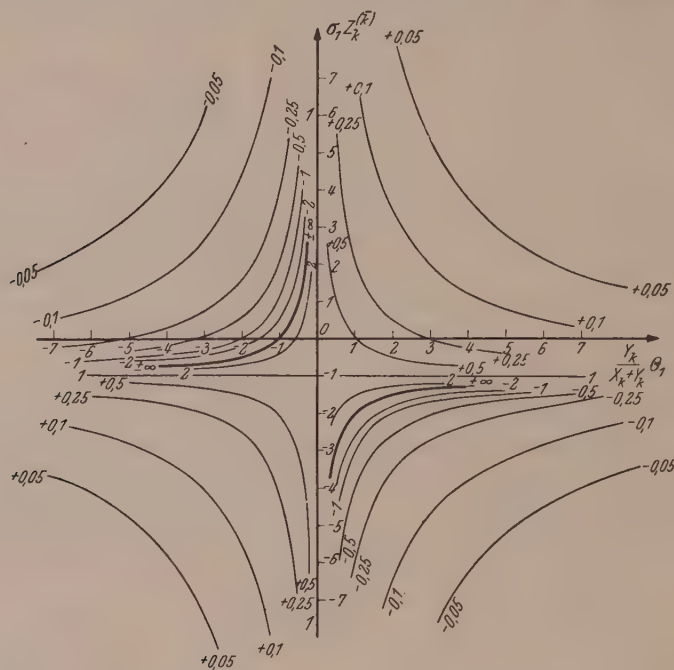


Abb. 2. Diagramm zur Ermittlung der bezogenen Amplitude.

aus der Abb. 2 entnommen werden. Überdies kann man nach durchgeführter Wahl von σ_1 und Θ_1 den Einfluß aller weiteren Störfrequenzen ebenfalls aus der Abb. 2 entnehmen.

VI. Der bifilar angelenkte Tilger am Sternmotor.

Aus konstruktiven Rücksichten werden Pendeltilger häufig bifilar nach dem in Abb. 3 dargestellten Schema angelenkt. Bei dieser Art der Ausführung ist die Relativbewegung der Pendelmasse gegenüber der Hauptmasse eine reine Translation. Der Schwerpunkt S_1 der Pendelmasse beschreibt gegenüber der rotierenden Hauptmasse „1“ eine Kreisbahn vom Radius s_1 um den Punkt A_1 . Wir bezeichnen jetzt mit L_1 den Abstand $\overline{OA_1}$ und den Trägheitsradius des Pendelkörpers bezüglich seines Schwerpunktes mit $i_{S_1}^*$. Die übrigen Bezeichnungen behalten wir bei.

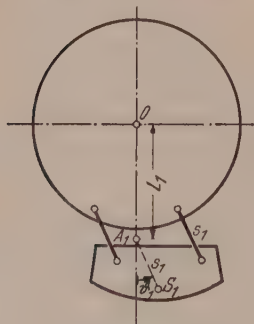


Abb. 3. Schema des bifilar angelenkten Tilgers.

Der Vergleich der kinetischen Energie T_1^* des Systems Masse „1“ mit Pendel

$$T_1^* = (\mathfrak{J}_1 + m_1 i_{S_1}^{*2}) \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_1}{2} v_{S_1}^2 \quad (43)$$

mit der entsprechenden Beziehung (12) zeigt, daß im vorhergehenden Rechnungsgang an Stelle von \mathfrak{J}_1 der Ausdruck $(\mathfrak{J}_1 + m_1 i_{S_1}^{*2})$ einzusetzen und die Größe i_{S_1} in der bisherigen Rechnung durch Null zu ersetzen ist. Die erste Abstimmbedingung nach Gl. (37) geht dann über in die Form, wie sie für das mathematische Pendel bekannt ist:

$$\frac{L_1}{s_1} = \bar{k}^2. \quad (44)$$

Da in diesem Falle die Größen λ_1 und σ_1 identisch werden, geht bei Verwendung eines bifilar angelenkten Tilgers eine zur Erzielung optimaler Wirkung verfügbare Größe verloren. Dies ersieht man daraus, daß in (42) die Größe $\sigma_1 \equiv \lambda_1$ bereits durch die Abstimmbedingung (44) vorgeschrieben ist. Der Einfluß der weiteren Frequenzen der wirkenden Störmomente ist wie vorhin aus der Abb. 2 zu entnehmen.

(Eingegangen am 22. September 1953.)

Endliche Deformationen dünner Plattenstreifen mit freien Längsrändern.

Von F. Müller-Magyari, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Analog den Elastikaproblemen eines inkompressiblen Stabes werden die entsprechenden Differentialgleichungen für die endlichen, aber dehnungslosen Verformungen eines dünnen Plattenstreifens (Band) abgeleitet.

Summary. By analogy with the well-known elastica-problems of a thin rod, the author develops the differential-equations for finite, but inextensional deformations of a thin strip, the two opposite borders of which are free.

Résumé. Par analogie avec les problèmes connus d'une barre incompressible, l'auteur développe les équations différentielles relatives à une bande de faible épaisseur, avec deux bords opposés libres, pour des déformations inextensionnelles, mais de grandeur finie.

I. Einleitung. Problemstellung.

Seit den Anfängen der Schaffung einer Elastizitätstheorie dünner Platten, also beginnend mit den Arbeiten von Lagrange, Clebsch, Kirchhoff, E. und F. Cosserat usw., um nur einige zu nennen, weiß man auch schon, daß die Mittelfläche einer dünnen Platte unter Belastung im Bereiche der endlichen Deformationen eine Fläche bildet, welche sich nur wenig von einer abwickelbaren unterscheidet. Wie diese etwas vage Aussage „nur wenig“ mathematisch präzise formuliert wird, soll hier vorläufig nicht zur Debatte stehen, tatsächlich besitzt die dünne Platte eine relativ große Dehnsteifigkeit

$$D = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} \quad (1)$$

(E Elastizitätsmodul, t Wandstärke, ν Querkontraktionszahl) gegenüber ihrer Biegesteifigkeit

$$K = \frac{E \cdot t^3}{12 (1 - \nu^2)}, \quad (2)$$

welche der dritten Potenz der sehr kleinen Wandstärke proportional ist. Es ist daher plausibel, daß die Platte einer ihr aufgezwungenen Verformung vorwiegend durch Biegung und nicht durch Dehnung der Mittelfläche ausweicht, vorausgesetzt natürlich, daß nicht die geometrischen und mechanischen Randbedingungen die reine Biegung verhindern, was aber leider, zumindestens in gewissen Zonen, sehr oft der Fall ist.

In dem in der vorliegenden Arbeit behandelten speziellen Fall des dünnen Plattenstreifens mit freien Längsrändern (Band) nach Abb. 1, welcher an den Querrändern jeweils eine starre Leiste aufweisen soll, läßt sich jedoch die reine Biegetheorie, wie gezeigt wird, mit sehr guter Annäherung verwenden. Der Plattenstreifen bzw. Band wird die Gestalt einer abwickelbaren Fläche annehmen, wobei die Anfangs- und Enderzeugenden durch die Lage der starren Querleisten gegeben sind. Durch jeden Punkt der Mittellinie geht eine Erzeugende, welche mit ihr den Winkel $\frac{\pi}{2} + \alpha(s)$

einschließt, wobei $\alpha = \alpha(s)$ eine erst zu ermittelnde Funktion der Bogenlänge s der Mittellinie bedeutet, deren Randwerte, wie gerade erwähnt, gegeben sind. Nachdem die Gestalt der abwickelbaren Mittelfläche, einer sogenannten Torse, bereits durch zwei Funktionen einer Veränderlichen bestimmt ist (meistens wählt man dafür in der Differentialgeometrie Krümmung und Torsion der Gratlinie der Torse), kommt es also nach Auffindung von $\alpha = \alpha(s)$ nur mehr auf die Ermittlung einer weiteren

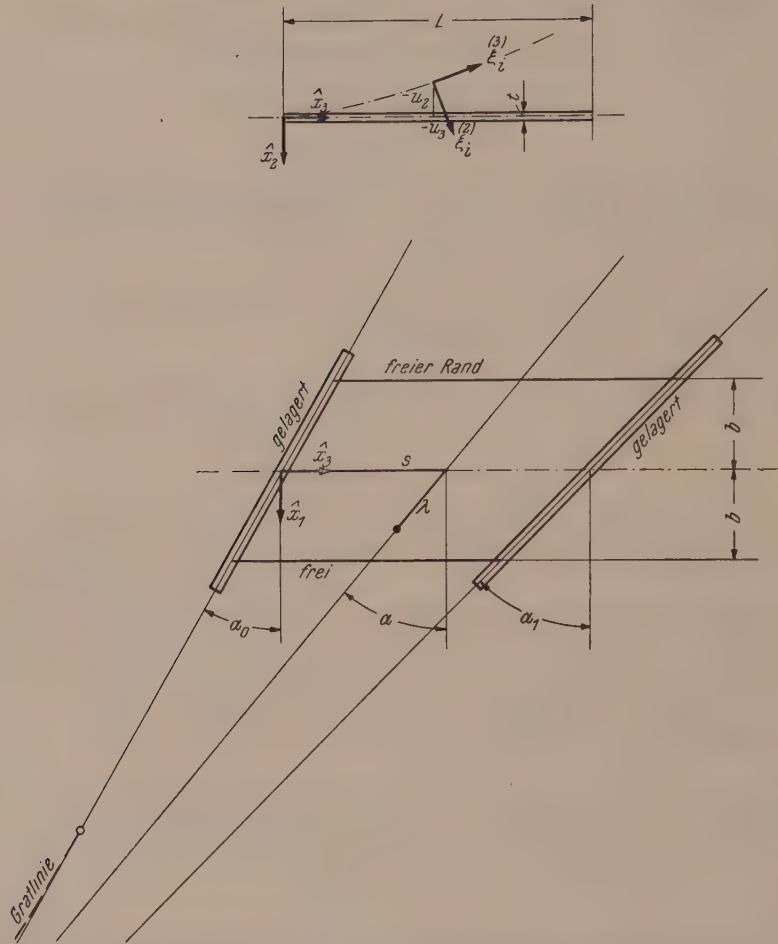


Abb. 1. Der dünnwandige Plattenstreifen mit freien Längsrändern. Koordinaten und Bezeichnungen.

Funktion an. Als günstig wird sich bei unserem Problem die Krümmung der Mittellinie erweisen, ebenfalls als Funktion der Bogenlänge s der Mittellinie.

Die Aufstellung der beiden, im allgemeinen gekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen für die sogenannten bestimmenden Funktionen der abwickelbaren Verformungsfläche, natürlich mit Parametern, welche die Abhängigkeit von der Belastung ausdrücken, ist das Ziel der Arbeit.

Beim analogen Stabproblem, nämlich Inkompressibilität, das heißt dehnungslose Schwerpunktsfaser, vorausgesetzt, sind bekanntlich drei Funktionen gesucht, z. B. zwei Verschiebungen und die Verdrehung des Stabquerschnittes, oder man kann die instantanen Winkelgeschwindigkeiten des begleitenden Dreibeines, also die

Krümmungen κ_i als Quasikoordinaten einführen^{1, 2} und erhält dann sehr elegant mit Hilfe der Variationsrechnung unter Berücksichtigung gewisser Vertauschungsrelationen die drei Gleichgewichts-Differentialgleichungen in der Kirchhoffschen Darstellung und weiterhin alle gewünschten Aussagen. In unserem Falle des dünnen Plattenstreifens, des Bandes, welches sozusagen einen Stab mit einem sehr langgestreckten Rechteckquerschnitt darstellt, Breite $2b \gg t$, verlieren wir also einen Freiheitsgrad der Verformung, es sind nur mehr zwei gesuchte Funktionen da, die Methode der Quasikoordinaten aber soll sinngemäß auch hier angewandt werden.

II. Einige geometrische Beziehungen.

Die Resultate dieses Kapitels sind natürlich jedem Geometer bekannt, im Zusammenhang mit der mechanischen Bedeutung und Formulierung des Problems und zur Einführung der notwendigen Bezeichnungen und Abkürzungen seien sie hier kurz wiederholt.

Die Abbildung und Abwicklung zweier Flächen aufeinander, nicht nur jener vom Krümmungsmaß Null, wie in unserem Falle der ursprünglich ebenen Platte, ist schon seit eh und je ein wichtiges und interessantes Sondergebiet der Differentialgeometrie und weist sehr viele Querverbindungen zu Nachbargebieten und -disziplinen auf (man vergleiche z. B. den Artikel von A. Voss in der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, III D 6 a). In dem vorliegenden Falle des dünnen Plattenstreifens mit freien Längsrändern sind die geometrischen Beziehungen sehr einfach und fast anschaulich und elementar ableitbar.

Wir setzen die Gleichung der Torse in der Gestalt

$$\hat{x}_i = x_i(s) + \lambda y_i(s), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

an, \hat{x}_i sind die Koordinaten eines Flächenpunktes bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems, die Bogenlänge s der Mittellinie und der Parameter λ sind die beiden Flächenparameter und die sechs Funktionen $x_i = x_i(s)$ und $y_i = y_i(s)$ sind vorläufig unbekannt. Die $x_i(s)$ bestimmen die Leitkurve $\lambda = 0$ der Torse, welche offensichtlich eine geodätische Kurve der verformten Mittelfläche sein wird, da sie aus einer geraden Linie hervorgegangen ist, die Funktionen $y_i(s)$ wiederum legen die Richtungen der Erzeugenden im Raume fest.

Denken wir uns die verformte abwickelbare Mittelfläche wieder in die ursprüngliche Plattenebene zurückgeführt, so geht jede Erzeugende in eine Gerade über, welche die Mittellinie unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} + \alpha(s)$ trifft. Sind nun die freien Längsränder $\hat{x}_1 = \pm b$ parallel zur Mittellinie, wie in unserem gezeichneten Beispiel, so treffen auch die Erzeugenden mit demselben Winkel am freien Längsrand auf und man erkennt, daß die Annahme der abwickelbaren Verformungsfläche in einer gewissen Randzone sicher nicht stimmen kann, denn dort an den freien Längsrändern müssen die Biegemomente senkrecht zum Rand verschwinden und das ist nunmehr im allgemeinen infolge der Krümmungsverhältnisse nicht der Fall. Diese Störung hat wohl einen Einfluß auf die örtlichen Spannungen, die charakteristische Form der Deformation im gesamten Gebiet aber wird davon nur wenig berührt (Randstörungsproblem).

Denken wir uns ferner im unverformten Zustand an jedem Punkt der Mittellinie $\lambda = 0$ ein normiertes Dreiein parallel zu den raumfesten Koordinaten \hat{x}_i angeheftet,

¹ P. Funk: Stabilitätstheorie bei Stäben unter Druck und Drillung. Österr. Ingenieur-Arch. 1, H. 1/2, 2—14.

² W. Raier: Allgemeine Stabilitätsbedingung für krumme Stäbe. Österr. Ingenieur-Arch. 6, H. 3, 236—246 (1952).

so wird es durch die Verformung in ein normiertes Dreibein $\xi_i^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$) übergehen und die Koordinaten dieses Dreibeines sind die Richtungskosinusse in bezug auf x_i

		körperfestes Koordinatensystem			
		(1)	(2)	(3)	
		$\xi_i^{(1)}$	$\xi_i^{(2)}$	$\xi_i^{(3)}$	
raumfestes Koordinaten- system	\hat{x}_1	α_1	α_2	α_3	(4)
	\hat{x}_2	β_1	β_2	β_3	
	x_3	γ_1	γ_2	γ_3	

Zwischen ihnen bestehen die bekannten sechs Relationen und sie lassen sich in der üblichen Weise durch die drei Eulerschen Winkel ϑ , ψ , φ ausdrücken. $\xi_i^{(1)}$ liegt in Binormalenrichtung der Mittellinie, $\xi_i^{(2)}$ in der Hauptnormalenrichtung, welche auch gleichzeitig mit der Flächennormale zusammenfällt und $\xi_i^{(3)}$ ist schließlich der Tangentenvektor an die verformte Mittellinie

$$x_1' = \alpha_3; \quad x_2' = \beta_3; \quad x_3' = \gamma_3. \quad (5)$$

Der Vektor y_i der Erzeugenden der Torse ist komplanar mit $\xi_i^{(1)}$ und $\xi_i^{(3)}$

$$y_i = \cos \alpha \cdot \xi_i^{(1)} - \sin \alpha \cdot \xi_i^{(3)}. \quad (6)$$

Die Krümmungen (instantanen Winkelgeschwindigkeiten des begleitenden Dreibeines, bezogen auf das körperfeste Koordinatensystem) κ_1 , κ_2 und die Torsion $\tau = \kappa_3$ sind

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{d\xi_i^{(2)}}{ds} \cdot \xi_i^{(3)} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} \cdot \alpha_3 + \frac{\partial \beta_2}{\partial s} \cdot \beta_3 + \frac{\partial \gamma_2}{\partial s} \cdot \gamma_3, \\ \kappa_2 &= \frac{d\xi_i^{(3)}}{ds} \cdot \xi_i^{(1)} = \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} \cdot \alpha_1 + \dots, \\ \kappa_3 &= \frac{d\xi_i^{(1)}}{ds} \cdot \xi_i^{(2)} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} \cdot \alpha_2 + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

wobei aber in unserem Falle die beiden wichtigen Beziehungen gelten

$$\kappa_2 = 0; \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \frac{\kappa_1}{\kappa_3}, \quad \text{das heißt } \kappa_3 = -\kappa_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (8)$$

welche man sofort aus (7) unter Berücksichtigung der Frenetschen Formeln gewinnen kann, bzw. durch Differentiation von (6).

Die Hauptkrümmung (Flächenkrümmung) κ_0 in einem Punkt der Mittellinie ist

$$\kappa_0 = \frac{\kappa_1}{\cos^2 \alpha} \quad (9)$$

und die Länge der Erzeugenden, gemessen von der Mittellinie bis zum Berührungspunkt mit der Gratlinie

$$h = \frac{\cos \alpha}{\alpha'}. \quad (10)$$

Schließlich lautet noch der Ausdruck für das Flächenelement

$$df = (h - \lambda) \cdot d\alpha \cdot d\lambda = (h - \lambda) \alpha' \cdot ds \cdot d\lambda = (\cos \alpha - \lambda \alpha') \cdot ds \cdot d\lambda. \quad (11)$$

Damit sind alle für das Weitere notwendigen geometrischen Beziehungen und Formeln angeschrieben.

III. Formulierung des Variationsproblems.

Die bestimmenden gewöhnlichen Differentialgleichungen für die beiden gesuchten Funktionen werden mit Hilfe der Variationsrechnung aufgestellt. Für die gesamte potentielle Energie des dünnen Plattenstreifens unter beliebiger äußerer Belastung gilt

$$\Pi_{\text{gesamt}} = \Pi_i + V \rightarrow \text{Extr.} \quad (12)$$

Π_i ist die innere Formänderungsenergie des Plattenstreifens, V das Potential der Belastung. Bekanntlich ist V gleich der negativen Arbeit der äußeren Kräfte

$$V = -\Pi_a \quad (13)$$

und drückt sich formelmäßig durch Flächen- oder Linienintegrale oder Einzelprodukte aus. So ist z. B. im Falle der Flächenbelastungen $p_i = p_i(\dot{x}_1; \dot{x}_3)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda \cos \alpha \\ x_3 &= s - \lambda \sin \alpha \end{aligned} \quad p_i = p_i(\dot{x}_1; \dot{x}_3) = \bar{p}_i(s; \lambda; \alpha), \quad (14)$$

$$\Pi_a^{(1)} = \int_{\mathfrak{F}} \bar{p}_i \bar{u}_i df, \quad (15)$$

wobei \bar{u}_i die Verschiebungen eines Flächenpunktes aus der Ruhelage bedeuten

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \hat{x}_1 - \dot{x}_1 = x_1 + \lambda(y_1 - \cos \alpha), \\ \bar{u}_2 &= \hat{x}_2 - \dot{x}_2 = x_2 + \lambda y_2, \\ \bar{u}_3 &= \hat{x}_3 - \dot{x}_3 = (x_3 - s) + \lambda(y_3 - \sin \alpha). \end{aligned} \quad (16)$$

Somit wird

$$\Pi_a^{(1)} = \int_{s=0}^L \int_{\lambda=-b/\cos \alpha}^{b/\cos \alpha} \bar{p}_i(s; \lambda; \alpha) \bar{u}_i(s; \lambda; y_i; \alpha) (\cos \alpha - \lambda \alpha') ds d\lambda. \quad (17)$$

Führt man hier die Integration nach λ aus, so erhält man schließlich für das Potential V einen Integralausdruck

$$V = V^{(1)}(s; x_i; \alpha_1 \dots \alpha_3; \alpha). \quad (18)$$

Die Rückführung auf ein einfaches Integral mit der Integrationsvariablen s ist unter Benützung der Transformationsformeln (14) immer möglich, wenngleich auch bei beliebigen nichtkonstanten Flächenbelastungen $p_i = p_i(s; \lambda; \alpha)$ die Ausführung der Integration nach λ auf Schwierigkeiten formaler Art stoßen kann.

Einen wichtigen Spezialfall stellen angreifende Kräfte und Momente an den starren Endleisten dar. Man kann sie nach den üblichen Gesetzen der Mechanik starrer Körper auf den Anfangs- bzw. Endpunkt der Mittellinie $\lambda = 0$ reduzieren und erhält unter der Voraussetzung flacher Neigungen, das heißt geringer Verdrehungen Θ_i , des begleitenden Dreibeines (Existenz des Potentials auch für Momente!)

$$\Pi_a^{(2)} = P_i u_i \Big|_{s=0}^{s=L} + M_i \Theta_i \Big|_{s=0}^{s=L}, \quad (19)$$

also

$$V^{(2)} = - \int_{s=0}^L [P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 (x_3 - s) + M_1 \kappa_1 + M_2 \kappa_2 + M_3 \kappa_3] ds. \quad (20)$$

Die innere Formänderungsenergie Π_i des Plattenstreifens ist unter der Annahme der reinen Biegung

$$\Pi_i = \frac{K}{2} \int_{\mathfrak{F}} \kappa^2 df, \quad (21)$$

wobei κ die Hauptkrümmung in einem Punkt der verformten Mittelfläche bedeutet (die zweite Hauptkrümmung ist ja stets Null). Für die Hauptkrümmungsradien R der Punkte einer Erzeugenden der Torse gilt die lineare Abnahme zur Gratlinie hin

$$R = R_0 \left(1 - \frac{\lambda}{h}\right) \quad (22)$$

und daraus folgt für die entsprechenden Krümmungen $\kappa = 1/R$

$$\kappa = \kappa_0 \frac{h}{(h - \lambda)}. \quad (23)$$

κ_0 bzw. R_0 sind stets die Werte im Schnittpunkt der Erzeugenden mit der Mittellinie.

Der Ausdruck für die innere Formänderungsenergie erhält somit die Gestalt

$$II_i = \frac{K}{2} \int_{s=0}^L \int_{\lambda=-b/\cos \alpha}^{b/\cos \alpha} \kappa_0^2 \frac{h^2}{(h - \lambda)^2} (h - \lambda) \alpha' ds d\lambda = \int_{s=0}^L \frac{K b}{2} \cdot \kappa_0^2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{b \alpha'} \ln \frac{1 + \frac{b \alpha'}{\cos^2 \alpha}}{1 - \frac{b \alpha'}{\cos^2 \alpha}} ds. \quad (24)$$

Das Variationsproblem lautet demnach

$$II_{\text{gesamt}} = V(s; x_i; \alpha_1 \dots \gamma_3; \alpha) + \int_{s=0}^L \frac{K b}{2} \cdot \kappa_0^2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{b \alpha'} \ln \frac{1 + \frac{b \alpha'}{\cos^2 \alpha}}{1 - \frac{b \alpha'}{\cos^2 \alpha}} ds \rightarrow \text{Extr.} \quad (25)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_3; & \kappa_1 &= \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} \cdot \alpha_3 + \dots; & \kappa_1 &= \kappa_0 \cos^2 \alpha; \\ x_2' &= \beta_3; & \kappa_2 &= \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} \cdot \alpha_1 + \dots; & \kappa_2 &= 0; \\ x_3' &= \gamma_3; & \kappa_3 &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} \cdot \alpha_2 + \dots; & \kappa_3 &= -\kappa_1 \operatorname{tg} \alpha = -\kappa_0 \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (26)$$

Weil $\alpha'/\cos^2 \alpha = (\operatorname{tg} \alpha)'$ ist, empfiehlt es sich, statt $\alpha = \alpha(s)$ die neue Funktion $\beta(s) = \operatorname{tg} \alpha$ einzuführen, ferner nur die Krümmung $\kappa_1(s)$ (die Hauptkrümmung der verformten Mittellinie) als zweite gesuchte Funktion beizugehalten und man erhält die veränderte Formulierung des Variationsproblems

$$II_{\text{gesamt}}^* = V(s; x_i; \alpha_1 \dots \gamma_3; \beta) + \int_{s=0}^L \frac{K b}{2} \cdot \kappa_1^2 \cdot \overbrace{(1 + \beta^2)^2}^{\varphi(\beta; \beta')} \frac{1}{b \beta'} \ln \frac{1 + b \beta'}{1 - b \beta'} ds \rightarrow \text{Extr.} \quad (27)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\kappa_2 = 0$$

wie oben (26)

$$\kappa_3 + \beta \kappa_1 = 0. \quad (28)$$

Versieht man die Nebenbedingungen $x_1' = \alpha_3$ usw. mit Lagrangeschen Faktoren $\lambda_\alpha; \lambda_\beta; \lambda_\gamma$ und $\kappa_2 = 0$ bzw. $\kappa_3 + \beta \kappa_1 = 0$ mit Λ bzw. $\bar{\Lambda}$, so lautet die erste Variation

$$\begin{aligned} \frac{\partial II^*}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} + \int \left[\frac{K b}{2} \kappa_1^2 \left(\varphi_\beta \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon} + \varphi_{\beta'} \frac{\partial \beta'}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{K b}{2} \cdot 2 \kappa_1 \varphi \frac{\partial \kappa_1}{\partial \varepsilon} + \lambda_\alpha \left(\frac{\partial x_1'}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varepsilon} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_\beta \left(\frac{\partial x_2'}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \beta_3}{\partial \varepsilon} \right) + \lambda_\gamma \left(\frac{\partial x_3'}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial \varepsilon} \right) + \Lambda \frac{\partial \kappa_2}{\partial \varepsilon} + \bar{\Lambda} \left(\frac{\partial \kappa_3}{\partial \varepsilon} + \beta \frac{\partial \kappa_1}{\partial \varepsilon} + \kappa_1 \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon} \right) \right] ds. \end{aligned} \quad (29)$$

Beachten wir jetzt die bekannte Verknüpfung zwischen Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial s} = -(\kappa_1 \alpha_2 - \kappa_2 \alpha_1) \text{ usw.} \quad (30)$$

und daher analog durch Vertauschung von s und ε

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial \varepsilon} = -(\check{\kappa}_1 \alpha_2 - \check{\kappa}_2 \alpha_1) \text{ usw.}, \quad (31)$$

wobei $\alpha_1, \check{\alpha}_2, \check{\alpha}_3$ als „Winkelvariationen“ bezeichnet werden können [analog den Formeln (7)], ferner die sogenannten Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \check{\kappa}_1}{\partial s} &= \kappa_2 \check{\kappa}_3 - \kappa_3 \check{\kappa}_2, \\ \frac{\partial \kappa_2}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \check{\kappa}_2}{\partial s} &= \kappa_3 \check{\kappa}_1 - \kappa_1 \check{\kappa}_3, \\ \frac{\partial \kappa_3}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \check{\kappa}_3}{\partial s} &= \kappa_1 \check{\kappa}_2 - \kappa_2 \check{\kappa}_1, \end{aligned} \quad (32)$$

so wird die erste Variation (29) nach Ausführung der Produktintegration

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} + \left[\frac{K b}{2} \cdot \kappa_1^2 \varphi \beta' \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon} + (K b \cdot \kappa_1 \varphi + \bar{A} \beta) \check{\kappa}_1 + A \check{\kappa}_2 + \bar{A} \check{\kappa}_3 + \right. \\ &+ \lambda_\alpha \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} + \lambda_\beta \frac{\partial x_2}{\partial \varepsilon} + \lambda_\gamma \frac{\partial x_3}{\partial \varepsilon} \Big]_{s=0}^L + \int_{s=0}^L \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon} \left[\frac{K b}{2} \cdot \left(\kappa_1^2 \varphi \beta - \frac{\partial \kappa_1^2 \varphi \beta'}{\partial s} \right) + \bar{A} \kappa_1 \right] + \right. \\ &+ \check{\kappa}_1 \left[-K b \cdot \frac{\partial \kappa_1 \varphi}{\partial s} + \lambda_\alpha \alpha_2 + \lambda_\beta \beta_2 + \lambda_\gamma \gamma_2 + A \kappa_3 - \bar{A} \kappa_2 - \frac{\partial \bar{A} \beta}{\partial s} \right] + \\ &+ \check{\kappa}_2 \left[-K b \cdot \kappa_1 \kappa_3 \varphi - \lambda_\alpha \alpha_1 - \lambda_\beta \beta_1 - \lambda_\gamma \gamma_1 - \frac{\partial A}{\partial s} + \bar{A} (\kappa_1 - \beta \kappa_3) \right] + \\ &+ \check{\kappa}_3 \left[K b \cdot \kappa_1 \kappa_2 \varphi - A \kappa_1 - \frac{\partial \bar{A}}{\partial s} + \bar{A} \beta \kappa_2 \right] + \\ &\left. + \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} \left[-\frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial s} \right] + \frac{\partial x_2}{\partial \varepsilon} \left[-\frac{\partial \lambda_\beta}{\partial s} \right] + \frac{\partial x_3}{\partial \varepsilon} \left[-\frac{\partial \lambda_\gamma}{\partial s} \right] \right\} ds. \end{aligned} \quad (33)$$

Durch Nullsetzen der Klammerausdrücke (einschließlich der Glieder in $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}$), welche bei den als willkürliche Variationen anzusehenden Größen $\frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon}$; κ_i ; $\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}$ stehen, erhält man in der bekannten Art und Weise 1. die Differentialgleichungen, welche die Gleichgewichtslagen des Plattenstreifens bestimmen, 2. die natürlichen Randbedingungen für $s = 0$ und $s = L$, soweit nicht dort Randwerte vorgeschrieben sind und daher die Variationen dort gleich Null sind. Wie man oben sieht, sind es, abgesehen von den meist trivialen Gleichungen für λ_α usw., vier gewöhnliche, aber gekoppelte und nichtlineare Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen β ; κ_1 ; A ; \bar{A} . Beim Anschreiben muß man natürlich noch die Nebenbedingungen (28) berücksichtigen.

Unter Umständen ist es ohne weiteres möglich, A und \bar{A} zu eliminieren und man erhält wirklich nur zwei bestimmende Differentialgleichungen für β und κ_1 , wie bereits am Anfang dieser Arbeit angedeutet wurde. Dies soll an einem einfachen Beispiel illustriert werden.

IV. Einzelkraft und -moment an den Querrändern.

Die Kräfte und Momente werden nach dem Anfangs- und Endpunkt der Mittellinie, also nach $s = 0$ und $s = L$, gebracht und nach den drei raumfesten Koordinatenachsen zerlegt gedacht. Sie müssen natürlich die äußeren trivialen Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Das Potential wurde bereits in (20) angeschrieben. Die Randwerte des Winkels $\alpha = \alpha(s)$ sind durch die Stellung der Querleisten vorgeschrieben,

dort verschwindet also die Variation $\frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon}$ und es ergeben sich aus (33) unter Berücksichtigung von (20) folgende Differentialgleichungen und Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{K b}{2} \cdot \kappa_1^2 \varphi_\beta - \frac{K b}{2} \cdot \frac{d}{ds} (\kappa_1^2 \varphi_{\beta'}) + \bar{A} \kappa_1 &= 0, \\ -K b \cdot \frac{d}{ds} (\kappa_1 \varphi) + \lambda_\alpha \alpha_2 + \lambda_\beta \beta_2 + \lambda_\gamma \gamma_2 - \Lambda \beta \kappa_1 - \frac{d}{ds} (\bar{A} \beta) + M_2 \beta \kappa_1 &= 0, \\ +K b \cdot \beta \kappa_1^2 \varphi - \lambda_\alpha \alpha_1 - \lambda_\beta \beta_1 - \lambda_\gamma \gamma_1 - \frac{d\Lambda}{ds} + \bar{A} (1 + \beta^2) \kappa_1 - M_1 \beta \kappa_1 - M_3 \kappa_1 &= 0, \\ -\Lambda \kappa_1 - \frac{d\bar{A}}{ds} + M_2 \kappa_1 &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{d\lambda_\alpha}{ds} = \frac{d\lambda_\beta}{ds} = \frac{d\lambda_\gamma}{ds} = 0; \quad (35)$$

für $s = 0$ und $s = L$:

$$\lambda_\alpha - P_1 = 0; \quad \lambda_\beta - P_2 = 0; \quad \lambda_\gamma - P_3 = 0; \quad (36)$$

$$K b \cdot \kappa_1 \varphi + \bar{A} \beta - M_1 = 0; \quad \Lambda - M_2 = 0; \quad \bar{A} - M_3 = 0. \quad (37)$$

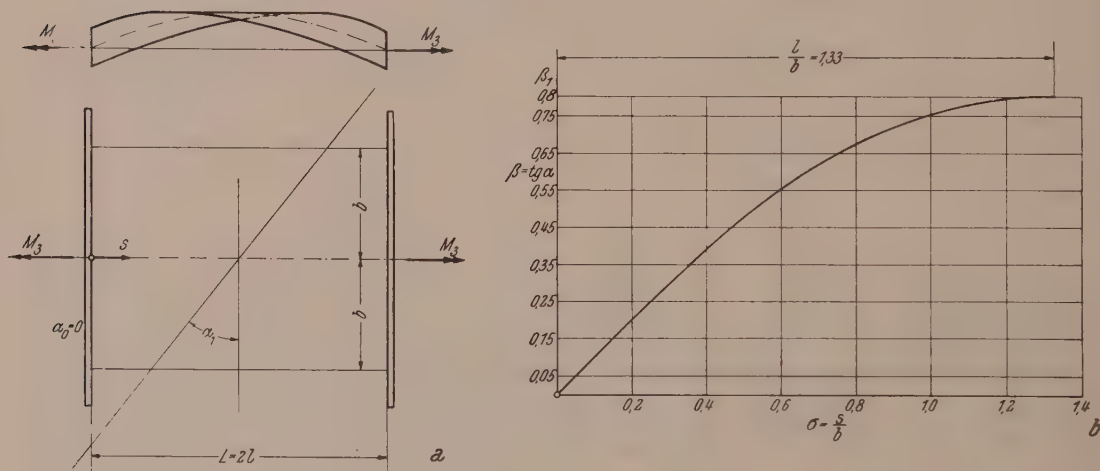


Abb. 2. (a) Verformung des dünnwandigen rechteckigen Plattenstreifens unter reiner Drehmomentenbeanspruchung und (b) Abhängigkeit des Winkels der Erzeugenden von der Längskoordinate s .

Betrachten wir z. B. als Spezialfall nur mehr ein angreifendes reines Drehmoment M_3 , wie es in Abb. 2 dargestellt ist. Für $s = 0$ ist $\alpha(0) = 0$ und daher auch $\beta = \tan \alpha = 0$, in der Mitte des Plattenstreifens $s = L/2 = l$ ist α vorläufig unbekannt, $\alpha(l) = \alpha_1$, das heißt $\beta = \beta_1$, aber aus Symmetriegründen ist $\beta'(l) = 0$. Sofort erkennt man aus (34) bis (37)

$$\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma = 0; \quad (38)$$

$$\bar{A} = M_3; \quad \kappa_1 = -\frac{M_3}{K b} \cdot \frac{\beta}{\varphi}. \quad (39)$$

Schreibt man diese Gl. (39) um, so erhält man für die Flächenkrümmung

$$\kappa_0 = \kappa_1 / \cos^2 \alpha = -\frac{M_3 \cdot \sin \alpha}{K \cdot h \cdot \ln \frac{1 + b/h \cos \alpha}{1 - b/h \cos \alpha}} \quad (40)$$

und man erkennt, daß sie nichts anderes als die Gleichgewichtsbedingung zwischen den inneren Schnittmomenten längs einer Erzeugenden des Plattenstreifens und der

Komponente $M_3 \cdot \sin \alpha$ des äußeren Momentes darstellt. Die einzige übrigbleibende Differentialgleichung ist

$$-\frac{\beta}{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\varphi^2} \varphi \beta' - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{\beta^2}{\varphi^2} \varphi \beta' \right) = 0, \quad (41)$$

welche die Eulersche Differentialgleichung des Variationsproblems

$$\begin{aligned} \Theta_3(l) - \Theta_3(0) &= 0 - \Theta_3(0) = \int_{s=0}^l \kappa_3 ds = - \int_{s=0}^l \beta \kappa_1 ds = \\ &= \frac{M_3}{Kb} \int_{s=0}^l \frac{\beta^2}{\varphi} ds = \frac{M_3}{Kb} \int_{s=0}^l F(\beta; \beta') ds \rightarrow \text{Extr.} \end{aligned} \quad (42)$$

ist (bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$), das heißt, die zweite bestimmende Gleichung für die Winkelfunktion $\beta = \beta(s)$ ergibt sich aus der Forderung, daß der Verdrehungswinkel Θ_3 am Ende möglichst groß wird.

Nachdem der Integrand nicht von der Integrationsvariablen s abhängt, gelingt die Integration durch eine Quadratur, es ist

$$c = F - \beta' F_{\beta'} = \frac{\beta^2}{(1 + \beta^2)^2} \cdot \frac{2b^2 \beta'^2}{(1 - b^2 \beta'^2) \ln^2 \frac{1 + b \beta'}{1 - b \beta'}}, \quad (43)$$

wobei c eine Integrationskonstante bedeutet. Sie ergibt sich aus der Bedingung $\beta' = 0$ für $s = l$ zu

$$c = \frac{1}{2} \frac{\beta_1^2}{(1 + \beta_1^2)^2}. \quad (44)$$

Man trennt also in (43) und erhält

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{b^2 \beta'^2} - 1 \right) \ln^2 \frac{1 + b \beta'}{1 - b \beta'} = \frac{\beta^2 / (1 + \beta^2)^2}{\beta_1^2 / (1 + \beta_1^2)^2}, \quad (45)$$

eine Differentialgleichung 1. Ordnung, welche man sehr einfach mit einem kombinierten numerisch-graphischen Verfahren auflösen kann. Man beginnt bei $s = 0$ mit $\beta = 0$ und $b \beta' = \dot{\beta} = 1$, erhält dadurch ein $\Delta s / b = \Delta \sigma = \Delta \beta / \dot{\beta}$ und schreitet so in mehreren Intervallen bis $\beta = \beta_1$. Zu einem angenommenen β_1 ergibt sich dann das zugehörige $1/b$. Für kleine $b \beta' \ll 1$, also in der Nähe von $s = l$, kann man zur Ergänzung und Kontrolle auch mit Potenzreihen in $(s - l)^2$ arbeiten. Die linke Seite von (45) wird dann einfach

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{b^2 \beta'^2} - 1 \right) \ln^2 \frac{1 + b \beta'}{1 - b \beta'} \doteq 1 - \frac{b^2 \beta'^2}{3}. \quad (46)$$

In Abb. 2 ist der Verlauf von $\beta = \beta(s)$ für ein gewähltes $\beta_1 = 0.8$ gezeichnet ($\alpha_1 = 38.6^\circ$). Es wurde eine Näherung mit nur neun Intervallen in β gewählt, das zugehörige l/b erhält man mit 1.33 und der Verdrehwinkel Θ_3 am Anfang bzw. Ende (halber gesamter Verdrehwinkel auf die Länge $L = 2l$) berechnet sich zu

$$\Theta_3(0) = \frac{M_3}{Kb} \int_{s=0}^l \frac{\beta^2}{(1 + \beta^2)^2} \cdot \frac{b \beta'}{\ln \frac{1 + b \beta'}{1 - b \beta'}} ds = \frac{M_3}{K} \int_{\sigma=0}^{1.33} \dots d\sigma = \frac{M_3}{K} \cdot 0.089. \quad (47)$$

Dieses Beispiel wurde bereits von L. Kirste³ behandelt, welcher zuerst einmal ebenfalls die Gl. (40) benützt statt (41) usw., jedoch eine etwas andersgeartete

³ L. Kirste: Elastic deformation of thin plates into developable surfaces. Fourth Congress, 1953. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau.

Näherungsbedingung aufstellt, nämlich jene der verschwindenden Resultierenden der inneren Querkkräfte längs einer Erzeugenden im Plattenstreifen. Naturgemäß erhalten wir infolge der Forderung (42), aus denen unsere zweite Differentialgleichung hervorgegangen ist, einen größeren Verdrehwinkel, der Unterschied ist jedoch unbedeutend.

Zum Abschluß sei noch der Grenzfall $l/b \rightarrow \infty$ angeschrieben: der Winkel $\alpha(s)$ ist dann konstant über die gesamte Länge gleich 45° , das heißt $\beta = 1$ und $\beta' = 0$. Die Funktion φ in (27) und weiterhin wird in diesem Grenzfall $\varphi = 8$ und die Krümmung κ_1 der Mittellinie ist ebenfalls konstant

$$\kappa_1 = - \frac{M_3}{K b} \cdot \frac{1}{8}. \quad (48)$$

Die Mittellinie nimmt dann die Gestalt einer Schraubenlinie an. Die Verwindung ϑ_3 (Verdrehung pro Längeneinheit) ist ebenfalls konstant und nach (47)

$$\vartheta_3 = \Theta_3/l = \frac{M_3}{K b} \cdot \frac{1}{8} \quad (49)$$

lauter Resultate, welche man ohne weiteres auch elementar verifizieren kann. Es sei hier noch bemerkt, wie bereits in Anm. 3 gezeigt wurde, daß die Resultate für Längen $l/b > 2.5$ bis 3 schon nicht mehr viel von diesem Grenzfall abweichen (geringer Störeinfluß der gelagerten Querränder).

(Eingegangen am 29. September 1953.)

Der Zykloidenraster.

Von Dr. R. Bereis, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es wird ein äußerst einfaches Zeichenverfahren für Zykloiden und Pseudozykloiden (inklusive deren Ausartungen) angegeben, das auf einer graphischen Integration beruht.

Summary. An extremely simple drawing method for cycloids and pseudo-cycloids (including their degenerations) is explained, which is based on a graphic integration.

Résumé. L'auteur explique une méthode de dessin excessivement simple pour cycloïdes et pseudo-cycloïdes (y-compris leurs dégénérationes), méthode qui se base sur une intégration graphique.

Einleitung.

Durch Spitzenkreis k_0 (O, r_0) und Scheitelkreis k_1 (O, r_1) ist eine Drehschar von Zykloiden¹ festgelegt, die durch jeden reellen Punkt P des Kreisringes (k_0, k_1) zwei reelle Kurven sendet. r_0 ist der Fixkreisradius; der Rollkreisradius hat den Wert $r = \frac{1}{2}(r_1 - r_0)$. Je nach Größen- und Realitätsverhältnissen von (r_0, r) bzw. (r_0, r_1) handelt es sich dabei um verschiedene Arten von Zykloiden bzw. deren Ausartungen, wie nachstehende Tabelle zeigt:

a) Zykloiden mit reellem Fix- und Rollkreis.

Polare Speerkoordinaten

1	Epizykloide	$r_1 > r_0 > 0$	$h = r_1 \cos \left(\frac{r_0}{r_1} \varphi + c \right)$
2	Hypozykloide	$0 < r_1 < r_0$	$h = r_1 \cos \left(\frac{r_0}{r_1} \varphi + c \right)$
3	Kreisevolvente	$r_0 > 0; \quad r_1 = \infty$	$h = r_0 (\varphi + c)$

¹ R. Blum: Cycloiden u. Cycloidalen usw., Progr. Wilhelms-Realsch. Stuttgart (1902). — R. Bereis: Über die Böschungslinien auf Drehquadriken. Mh. Math. 56, 344—351 (1952).

b) Pseudozykloiden.

1	Hyperzykloide.....	$r_0 = b i; \quad r_1 = a$	$h = a ch \left(\frac{b}{a} \varphi + c \right)$
2	Parazykloide	$r_0 = a; \quad r_1 = b i$	$h = b sh \left(\frac{a}{b} \varphi + c \right)$
3	Logarithmische Spirale.....	Grenzfall	$h = e \pm k \varphi + c$

In oben angeführte Tabelle wurden auch die Gleichungen der einzelnen Drehscharen in Speerkoordinaten² aufgenommen. Bei dieser Darstellungsart wird bekanntlich die orientierte Kurventangente durch ihren orientierten Abstand $O t = h$ von O und dessen Polarwinkel φ festgelegt.

Übt man auf eine solche Drehschar von Zykloiden noch alle möglichen Streckungen von der Mitte O aus, so erhält man eine zweiparametrische Ähnlichkeitsschar, die im allgemeinen durch jeden Punkt der Ebene ∞^1 Kurven hindurchschickt.

Zweck vorliegender Note ist es, auf ein einfaches Zeichenverfahren für Zykloiden hinzuweisen, wobei von einer solchen Kurve die Mitte O , ein Linienelement (P, t) und das Radienverhältnis als bekannt vorausgesetzt wird. Dieses Verfahren beruht ebenso wie ein schon früher veröffentlichtes³ auf einer graphischen Integration.

Der Zykloidenraster.

Man hebe auf einem Millimeterpapier eine Grundlinie x hervor und trage sodann zwei einander auf x schneidende Gerade a und b ein, deren Steigungen der Bedingung

$$\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta = r_1^2 : r_0^2 = (r_0 + 2r)^2 : r_0^2$$

genügen. Sodann lege man ein durchsichtiges Pauspapier, auf dem die Mitte O und ein Linienelement (P, t) der zu zeichnenden Zykloide markiert sind, derart auf den „Zykloidenraster“, daß O auf x und P auf die Gerade a zu liegen kommen, während t in die x -Richtung weist. Jener Punkt K von b , der mit P auf einer zu x normalen Rasterlinie liegt, ist die Krümmungsmitte für P . Nun kann man ein Stück des Krümmungskreises zeichnen. Auf diesem wähle man sodann einen Nachbarnpunkt und verfare mit ihm in gleicher Weise. So fortfahrend, erhält man die gewünschte Zykloide auf dem Pauspapier durch aneinandergereihte Bogenstücke von Krümmungskreisen approximiert.

Abb. 1 zeigt die Anordnung des Rasters bei Zykloiden mit reellem Polkreispaar, Abb. 2 bei Pseudozykloiden. Bei den Grenzfällen — Kreisevolvente und logarithmische Spirale — kann man sowohl der größeren Genauigkeit, als auch der leichteren Handhabung zuliebe das angegebene Verfahren etwas modifizieren. Bei der Konstruktion einer Kreisevolvente kann man das Pauspapier um O drehbar machen, ist doch in diesem Fall $OK = r_0$ für eine bestimmte Kurve eine konstante Größe. Beim Zeichnen einer logarithmischen Spirale legt man günstigerweise den auf der x -Achse frei wählbaren Scheitel S nach O , worauf das Pauspapier wieder um O drehbar auf der Unterlage befestigt werden kann.

² Die Gleichung einer Kurve in polaren Speerkoordinaten ist im wesentlichen mit der magischen Gleichung einer Kurve identisch, nur daß bei der magischen Gleichung der Polarwinkel der Kurventangente statt des Polarwinkels des Ursprungslothes Verwendung findet. Siehe W. P. Hiern: On the magical equation to the Tangent of a curve. Quart. J. of Math. 6 (1864). — Die Gleichungen der Zykloiden in polaren Speerkoordinaten wurden von Fr. Fabricius-Bjerre bekanntgegeben: Über zyklodale Kurven in der Ebene und im Raum. Dan. Mat. Fys. Medd. 26, Nr. 9 (1951).

³ R. Bereis: A. a. O.

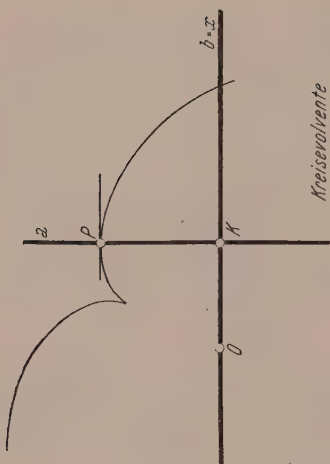


Abb. 1 c.

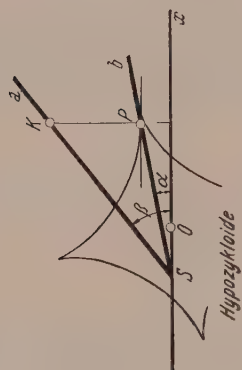


Abb. 1 b.

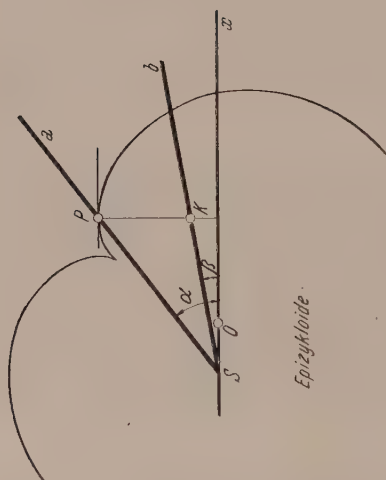


Abb. 1 a.

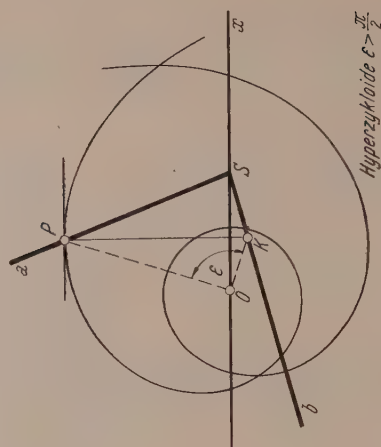


Abb. 2 c.

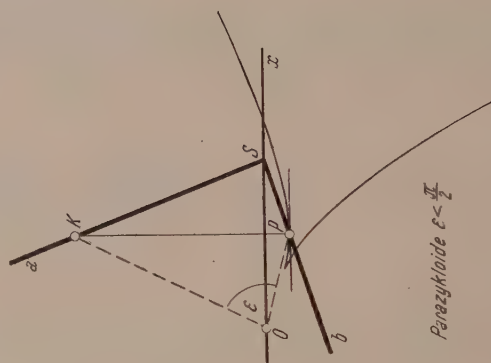


Abb. 2 b.

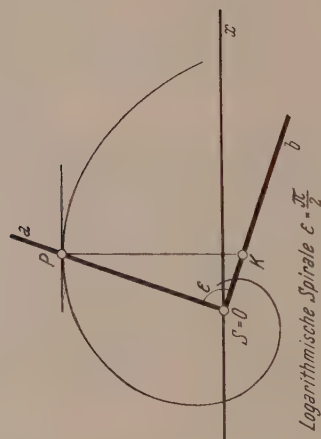


Abb. 2 a.

Begründung.

Wählt man zur Beschreibung einer ebenen Kurve polare Speerkoordinaten, so lautet, unter Zugrundelegung der üblichen Vorstellung der Gaußschen Zahlenebene, die komplexe Kurvengleichung

$$z = (h + h' i) e^{i\varphi},$$

während ihre Evolute durch

$$z_1 = (\bar{h}' + \bar{h}'' i) i e^{i\varphi}$$

festgelegt ist. Man erhält somit den Abstand y_1 der Krümmungsmitte K eines Kurvenpunktes P von jenem Polstrahl x , der zur Tangente t von P parallelläuft, durch Multiplikation des Lotes $y = Px$ mit dem Faktor $h'' : h$ (Abb. 3), also

$$y_1 = \frac{h''}{h} y.$$

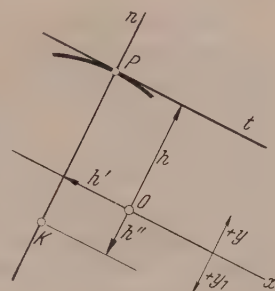


Abb. 3.

Bei einer Ähnlichkeitsschar von Zykloiden nimmt der Faktor $h'' : h$ den konstanten Wert $-r_0^2 : r_1^2$ an. Somit besteht zwischen den Trägern aller parallelen Linienelemente der Ähnlichkeitsschar und ihren Krümmungsmitten eine perspektive Affinität, die bei dem oben geschilderten Zeichenverfahren ausgewertet wird.

(Eingegangen am 25. September 1953.)

Ein Beitrag zum Maschinenrechnen: Die Berechnung vielstelliger Quotienten nach dem Aufbauverfahren¹.

Von K. Holecek, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Sind von einem Quotienten mehr Stellen erforderlich, als auf der Rechenmaschine in einem Arbeitsgang erreichbar sind, dann braucht man — falls das subtraktive Verfahren angewendet wird — nur den jeweiligen Divisionsrest als neuen Dividenten zu betrachten und kann durch Weiterführung der Division beliebig viele Quotientenstellen ermitteln. Wird die Division nach der für die Praxis einfacheren Aufbaumethode durchgeführt, dann scheint die Weiterführung dadurch behindert, daß bei diesem Verfahren die Reste nicht unmittelbar zur Verfügung stehen. Es wird gezeigt, daß man auch ohne Kenntnis der Reste durch Einhalten eines ganz einfachen Schemas beliebig viele Stellen des Quotienten ermitteln kann.

Summary. Supposing you need more digits of a quotient than available on the calculator at one shift, you will have to take the remainder as the new dividend — in case the subtractive method is used — and to carry on the division in order to find as many places of the quotient as wished. Whenever you carry on the division through the multiplying method, which is much simpler in practice, you will find that there is a certain handicap in going on with the dividing process, as the remainders do not appear on the calculator. It may be seen, however, that through the latter method, without knowing the remainders, any number of places can be ascertained, provided a certain and very simple routine is observed.

Résumé. A-t-on besoin d'un plus grand nombre de chiffres au quotient que celui que l'on pourrait obtenir en un seul procédé au moyen de la machine à calculer, il suffit — au cas où la méthode soustractive serait appliquée — de considérer le reste de la division comme un nouveau dividende et l'on peut en continuant la division obtenir un nombre quelconque de chiffres au quotient. Si la division est faite à base de la méthode division par multiplication qui est plus simple dans la pratique, la continuation semble alors être empêchée du fait que par ce procédé les restes ne sont pas immédiatement disponibles. Il est démontré que l'on peut, même si l'on n'a pas connaissance des restes, obtenir un nombre quelconque de chiffres au quotient en se servant d'un schéma tout à fait simple.

Einleitung.

Maschinenrechner, die mit Handkurbelmaschinen arbeiten, verwenden für die Division mit Vorliebe das Aufbauverfahren, das heißt sie stellen den Divisor im Einstellwerk (EW) ein und kurbeln bei geeigneter Wagenversetzung bis der Divident

¹ Diese Untersuchung würde durch eine Vermutung des Rechenmaschinenkonstruktors Curt Herzstark angeregt.

im Hauptzählwerk (HW) aufgebaut ist, wobei das Umdrehungszählwerk (UW) den Quotienten zeigt. Der Vorgang ist also eine Multiplikation und entspricht der Divisionsprobe. Das hat gegenüber dem subtraktiven oder Abbauverfahren den Vorteil, daß nach Fertigstellung der Rechnung Dividend, Divisor und Quotient in dieser Reihenfolge im HW, EW und UW stehen und kontrolliert werden können. Überdies erspart man sich das Einstellen, Übertragen und Löschen des Dividenden sowie das Löschen der Eins aus dem UW. Wenn der Dividend von einem früheren Rechnungsgang schon im HW steht, ist natürlich das subtraktive Verfahren günstiger, allerdings nur dann, wenn der Rechner schon mit Vorbedacht dafür gesorgt hat, daß der Dividend auch genügend weit links im HW steht.

Die Anzahl der Quotientenstellen, die in einem Zuge ermittelt werden können.

Diese Anzahl, die naturgemäß für beide Verfahren gleich sein muß, ist nicht immer gleich der Stellenzahl des UW. Sie kann geringer sein, wenn der Divisor so lang ist, daß man nur einen Teil des UW für die Berechnung von Quotientenstellen

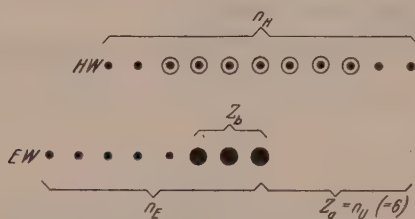


Abb. 1.

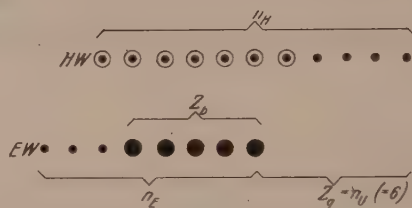


Abb. 2.

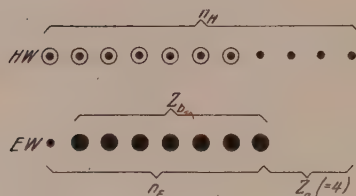


Abb. 3.

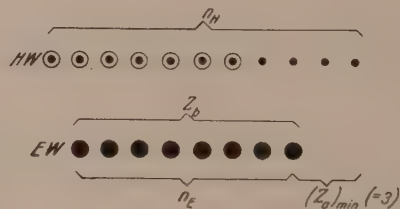


Abb. 4.

Abb. 1 bis 4. Schema der Zählwerke zu Beginn der Division für verschieden lange Divisoren. HW Hauptzählwerk, EW Einstellwerk, ●●● eingestellter Divisor, ○○○ Dividend, ●●● unbesetzte Stellen, z_a Stellenzahl des Dividenden, z_b Stellenzahl des Divisors, z_q Stellenzahl des Quotienten, $n_E (= 8)$ Stellenzahl des Einstellwerkes, $n_U (= 6)$ Stellenzahl des Umdrehungszählwerkes, $n_H (= 11)$ Stellenzahl des Hauptzählwerkes.

ausnützen kann. Die Abb. 1 bis 4, die schematisch die Einstellung für je eine Division $a : b$ darstellen, zeigen, in welcher Weise die Anzahl der in einem Zuge errechenbaren Quotientenstellen von den Stellenzahlen der Zählwerke und des Divisors abhängt. Es bedeuten: z_b die Stellenzahl des Divisors, z_a jene des Quotienten und n_E , n_U , n_H der Reihe nach die Stellenzahlen von EW, UW und HW. Für die Bilder wurden $8 \times 6 \times 11$ Stellen gewählt, die Stellenzahlen der Kleinstrechenmaschine Curta.

Abb. 1 zeigt am Beispiel eines dreistelligen Divisors den einfachsten Fall, der so viele Quotientenstellen liefert, als UW-Stellen vorhanden sind (in der Abb. also 6). Hier und auch in den folgenden Abbildungen wurde ein solcher Divisor b gewählt, der größer ist als die gleich viele Ziffern umfassende Zahl a_b , die vom Dividenden a , von dessen höchster Stelle beginnend, abgetrennt zu denken ist (z. B. $a = 312153$, $b = 3181$, $a_b = 3121$).

Die volle Ausnützung des UW ist nur möglich, solange der Divisor in dem zur Verfügung stehenden Teil des EW Platz hat. Wie Abb. 2, die den Grenzfall zeigt, zu entnehmen ist, können nur dann mit Gewißheit n_U Stellen vom Quotienten ermittelt werden, wenn für die Stellenzahl z_b des Divisors b gilt:

$$z_b \leq n_H - n_U. \quad (1)$$

Falls $a_b \geq b$ (s. oben), wird die Schranke um 1 größer.

Abb. 3 zeigt am Beispiel eines 7stelligen Divisors einen Fall, bei dem man das UW nicht mehr voll ausnützen kann. Es ist dann

$$z_q = n_H - z_b \quad (2)$$

oder gegebenenfalls um 1 mehr, wenn $a_b \geq b$.

Abb. 4 zeigt die sicherlich immer mögliche Mindestanzahl $(z_q)_{\min}$ von Quotientenstellen. Sie ergibt sich, wenn der Divisor das EW vollständig ausfüllt, also wenn $z_b = n_E$. Es ist $(z_q)_{\min} = n_H - n_E$.

Die Berechnung weiterer Quotientenstellen bei Anwendung des subtraktiven Verfahrens.

Zur Ermittlung weiterer Quotientenstellen braucht man nichts anderes zu tun, als den Divisionsrest als neuen Dividenten zu betrachten und mit dem gleichen Divisor wieder eine Division durchzuführen. So bekommt man eine weitere Zifferngruppe des Quotienten. Der Vorgang kann natürlich beliebig oft wiederholt werden.

Es empfiehlt sich, die Reste immer um gleich viele Stellen nach vor zu nehmen, nämlich um ebenso viele, als man Quotientenstellen in einem Arbeitsgang entwickeln kann². Dann haben alle Teilquotienten genau gleich viele Ziffern, die man ohneweiters aneinanderreihen kann, und es werden Unsicherheiten oder Irrtümer vermieden, falls einmal ein Teilquotient mit Null beginnt (z. B. $740 : 329 = 2 \cdot 24924 \ 012158 \dots$).

In der Tat gilt für die Division $a : b$, wenn q_i und r_i den i -ten Teilquotienten bzw. den i -ten Rest bedeuten:

$$q_1 = \frac{a}{b} - \frac{r_1}{b}, \quad (3_1)$$

$$q_2 = 10^n \frac{r_1}{b} - \frac{r_2}{b}, \quad (3_2)$$

$$q_3 = 10^n \frac{r_2}{b} - \frac{r_3}{b}, \quad (3_3)$$

.....

$$q_{v-1} = 10^n \frac{r_{v-2}}{b} - \frac{r_{v-1}}{b}, \quad (3_{v-1})$$

$$q_v = 10^n \frac{r_{v-1}}{b} - \frac{r_v}{b}. \quad (3_v)$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= q_1 + 10^{-n} q_2 + 10^{-2n} q_3 + \dots + 10^{-(v-2)n} q_{v-1} + \\ &+ 10^{-(v-1)n} q_v + 10^{-(v-1)n} \frac{r_v}{b}. \end{aligned} \quad (4)$$

² Da man die Art der Reste natürlich nicht voraussehen kann, ist für diese Stellenzahl schon am Beginn der Rechnung auf alle Fälle der kleinere Wert zu nehmen, also jener, der sich bei $a_b < b$ ergibt, auch wenn tatsächlich $a_b \geq b$ ist.

³ Für die Stellenzahl z_q der Teilquotienten steht hier der Einfachheit halber n .

Die Formel (4) drückt aber nichts anderes aus, als daß man die Ziffern der Teilquotienten nur aneinanderzureihen braucht, sofern die Reste um genau $n (= z_q)$ Stellen vorrücken, wenn sie die Rolle eines neuen Dividenden übernehmen.

Der Dezimalpunkt wird beim ersten Arbeitsgang bestimmt. Bei den weiteren Teilquotienten muß man sich darum gar nicht mehr kümmern, da man ja nur die einzelnen Ziffernfolgen braucht.

Der ganze Vorgang ist also denkbar einfach, doch wird es bei der Durchführung oft als lästig empfunden, daß man bei Maschinen ohne Wirteleinstellung jedesmal eine Reihe von Schritten auszuführen hat, um den Rest nach vorne zu bringen und den Divisor wieder bereit zu haben. Bei der Weiterführung der Aufbaudivision, die im folgenden gezeigt wird, entfallen in der Regel alle diese Schritte, bis auf eine gemeinsame Zählwerkslöschung.

Die praktische Ermittlung weiterer Quotientenstellen bei der Aufbaudivision.

Hier scheint zunächst die Schwierigkeit zu bestehen, daß man bei einer Aufbaudivision $a : b$ den Divisionsrest r nicht unmittelbar zur Verfügung hat. Denn entweder bildet man im HW eine möglichst knapp unter dem Dividenden a liegende Zahl a' , dann ist $r = a - a'$, oder man überschreitet a möglichst wenig, etwa um u , und bildet im HW $\bar{a} = a + u$, dann ist $r = b - u$. Es wäre also in beiden Fällen eine kleine Zwischenrechnung nötig, um den Rest r zu bekommen. Nun kann man aber, wie die folgende Überlegung zeigt, mit dem Überschuß selbst das Auslangen finden und braucht den Rest erst gar nicht zu ermitteln. Das ist insofern ein Vorteil, als man den Überschuß u in der Regel direkt ablesen kann, wenn der Dividend nicht gerade sehr lang ist.

Kurbelt man auf einen Überschuß u_1 im HW, dann ist $\bar{q}_1 = \frac{a}{b} + \frac{u_1}{b}$, wenn allgemein \bar{q}_i die Anzeige des UW bedeutet, die sich bei der Bildung eines möglichst kleinen Überschusses ergibt. Es ist $\bar{q}_1 = q_1 + 1$ — die niedrigste Stelle als Einerstelle vorausgesetzt — und $u_1 = b - r_1$.

Die Gl. (3₂) kann daher geschrieben werden:

$$q_2 = 10^n \frac{b - u_1}{b} - \frac{r_2}{b}$$

oder

$$q_2 = 10^n - \left(10^n \frac{u_1}{b} + \frac{r_2}{b} \right). \quad (5)$$

Gl. (5) bedeutet aber nichts anderes, als daß man das Zehnerkomplement von q_2 erhält, wenn man den Überschuß u_1 um n Stellen nach links verschoben im HW aufbaut und dabei wieder einen Überschuß erzeugt. Dieser neuerliche Überschuß (über u_1) ist gemäß Formel (5) der zweite Rest r_2 . Die Ziffern von $\bar{q}_2 = q_2$ erhält man bequem lesbar, wenn man einfach das UW auf Gegenläufigkeit schaltet⁴.

Da der zweite Divisionsschritt bereits den richtigen Rest r_2 liefert, kann damit so wie mit dem Dividenden a zu Beginn der Rechnung verfahren werden. Die Verhältnisse wiederholen sich also nach je zwei Schritten.

Für die Fortsetzung der Aufbaudivision $a : b$ ergibt sich somit die folgende Verfahrensregel:

⁴ Bei Maschinen mit automatischer Steuerung der Laufrichtung des UW (gemäß der ersten Kurbeldrehung nach der Löschung des UW) kann man die Umschaltung dadurch erzielen, daß man eine subtraktive Hilfsdrehung macht, die durch eine nachfolgende additive für die Zählwerke unwirksam gemacht wird. Das UW ist aber dann bereits auf Gegenläufigkeit geschaltet.

1. Der Dividend a wird bis zum kleinstmöglichen Überschuß u_1 im HW aufgebaut. Der (n -stellige) Wert \bar{q}_1 , der dann im UW steht, ist an seiner niedrigsten Stelle um eine Einheit zu verringern, womit sich der erste Teilquotient q_1 ergibt.

2. Das UW wird umgesteuert und nunmehr (nach Löschung beider Zählwerke) der Überschuß u_1 um genau n Stellen nach links verschoben aufgebaut, wobei neuerdings ein Überschuß zu erzeugen ist. Dieser letztere Überschuß ist bereits r_2 . Das UW enthält die richtige Ziffernfolge des zweiten Teilquotienten q_2 .

Man kann beliebig weiter fortsetzen, immer unter Beachtung des obigen Zweierturnus.

Gl. (4) kann man nun durch \bar{q}_1 und \bar{q}_2 ausdrücken, wobei es der einfacheren Schreibweise halber zweckmäßig ist, die niedrigste Stelle von q_1 als Einerstelle anzunehmen und den Ausdruck zu diesem Zwecke, falls nötig, mit einer geeigneten Zehnerpotenz 10^x zu multiplizieren:

$$10^x \frac{a}{b} = [(\bar{q}_1 - 1) + 10^{-n} \bar{q}_2] + [10^{-2n} (\bar{q}_3 - 1) + 10^{-3n} \bar{q}_4] + \\ + \dots + [10^{-(v-2)n} (\bar{q}_{v-1} - 1) + 10^{-(v-1)n} \bar{q}_v] + 10^{-(v-1)n} \frac{r_v}{b}. \quad (6)$$

$v = 2\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots$

Eine mehr als zweifache Füllung des UW wird in der Rechenpraxis freilich nur selten vorkommen. Ein solcher Ausnahmefall ist z. B. das Quadratwurzelverfahren nach Collatz⁵.

Zum Abschluß mögen die Verhältnisse noch an einem Zahlenbeispiel demonstriert werden.

Beispiel: $740 : 329 = ?$ (nach dem Aufbauverfahren).

1. 329 im EW an den Stellen 1 bis 3 einstellen, Wagen an die 6. Stelle, UW gleichläufig. 740 im HW mit möglichst kleinem Überschuß aufbauen: $740 \cdot 00325$. Das UW zeigt $2 \cdot 24925 = \bar{q}_1$

$$\underline{q_1 = 2 \cdot 24924} \quad (= \text{erster Teilquotient}).$$

Bei diesem Rechnungsgang Bestimmung des Stellenwertes von q_1 . Das HW zeigt als Überschuß die Ziffernfolge $u_1 = 325$.

2. HW, UW löschen, UW auf gegenläufig umschalten, Wagen an die 6. Stelle, im HW die Ziffernfolge 325 mit möglichst kleinem Überschuß aufbauen⁶: 325000018 . Das UW zeigt

$$\underline{\bar{q}_2 = q_2 = 012158} \quad (= \text{zweiter Teilquotient}).$$

Das HW zeigt als Überschuß die Ziffernfolge $u_2 = 18$ (= zweiter Rest!).

3. HW, UW löschen, UW wieder auf gleichläufig schalten. Der Wagen darf jetzt nur an die 5. Stelle kommen, weil die Eins von 18 an die 8. Stelle gehört. Im HW 18 mit möglichst kleinem Überschuß aufbauen: 18000248 . Das UW zeigt $\bar{q}_3 = 054712$,

$$\underline{q_3 = 054711} \quad (= \text{dritter Teilquotient}).$$

⁵ Collatz: Z. angew. Math. Mechan. 16, 59/60 (1936).

⁶ Da der Überschuß in diesem Beispiel stets um sechs Stellen weiter links im HW aufzubauen ist, muß die Ziffernfolge 325 an die Stellen 7, 8, 9 zu stehen kommen. Würde man sich verleiten lassen, den nach der ersten Umdrehung an den Stellen 6 bis 8 erscheinenden Wert 329 durch subtraktive Umdrehungen in der folgenden (5.) Wagenstellung an 325 heranzubringen, dann bliebe die höchste Stelle des UW unentwickelt und man bekäme daher nur 5 brauchbare Ziffern des Teilquotienten, was zu Irrtümern führen könnte.

4. HW, UW löschen, UW auf gegenläufig umschalten, Wagen an die 6. Stelle, im HW 248 mit möglichst kleinem Überschuß aufbauen: 248000200. UW zeigt

$$\bar{q}_4 = \underline{q}_4 = 246200 \text{ (= vierter Teilquotient) usw.}$$

Ergebnis: $740 : 329 = 2.24924\ 012158\ 054711\ 246200$

1. 2. 3. 4. Teilquotient.

(Eingegangen am 13. Oktober 1953.)

Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow.

B. Super- and Transonic Flow.

By M. Z. Ę. Krzywoblocki, University of Illinois.

Summary. In this second part of his work on Bergman's linear integral operator method the author discusses supersonic and transonic flow. At first, the operator obtained by the use of Riemann's function is thoroughly discussed as well as the question of the domain of convergence. In the section on transonic flow the application of the integral operators of the first and second kind in the case of the exact and the simplified compressibility equation is shown.

Zusammenfassung. In diesem zweiten Teil seines Werkes bespricht der Verfasser die Überschallströmung und die Transschallströmung, und zwar auf Grund der Linear-Integral-Operator-Methode von Bergman. Zunächst wird der Operator genau erörtert, welcher sich aus der Verwendung der Riemannschen Funktion ergibt, und dann wird auch die Frage des Konvergenzbereiches behandelt. In dem Abschnitt über die Transschallströmung wird die Anwendung des Integraloperators der ersten und zweiten Art im Falle der genauen und der vereinfachten Kompressibilitätsgleichung dargelegt.

Résumé. Dans la seconde partie de son œuvre l'auteur discute le courant super-sonique et le courant trans-sonique selon la méthode de Bergman concernant l'opérateur linéaire-intégral. D'abord l'auteur traite en détail le problème de l'opérateur obtenu à l'aide de la fonction Riemann, ainsi que la question du domaine de la convergence. Dans la section qui a pour sujet le courant trans-sonique, il démontre l'application de l'opérateur intégral du premier et du deuxième genre dans le cas de l'équation de compressibilité exacte et simplifiée.

Part III.

Supersonic Flow.

1. Some remarks on different types of equations.

Let us discuss briefly various simple cases of partial differential equations and the general solutions of these equations. The following three equations will be considered

$$\frac{1}{4}(\Psi_{\mu\mu} + \Psi_{\vartheta\vartheta}) = \Psi_{\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}} = 0, \quad \bar{\vartheta} = \mu + i\vartheta, \quad \bar{\bar{\vartheta}} = \mu - i\vartheta, \quad (3.1.1)$$

$$\Psi_{xx} - \Psi_{yy} = 0, \quad \text{or} \quad 4\Psi_{\mu\vartheta} = 0, \quad \mu = x + y, \quad \vartheta = x - y, \quad (3.1.2)$$

$$\Psi_{\vartheta\vartheta} + 4(1 - \mu)\Psi_{\mu\mu} - 2\Psi_{\mu} = 0. \quad (3.1.3)$$

In equation (3.1.2) by the transformation $x + y = \mu$, $x - y = \vartheta$, $\Psi(x, y) = \Psi(\mu, \vartheta)$, equation $\Psi_{xx} - \Psi_{yy} = 0$, changes to $4\Psi_{\mu\vartheta} = 0$. The first equation is of elliptic type, the second of hyperbolic and the third of mixed type. In the first case, the general solution is given by

$$\Psi = f(\bar{\vartheta}) + g(\bar{\bar{\vartheta}}), \quad (3.1.4)$$

and in the second one, by

$$\Psi = f(\mu) + g(\vartheta), \quad (3.1.5)$$

where f and g are arbitrary (sufficiently many times differentiable) functions of one variable. As μ and ϑ are real variables, it is seen that in (3.1.4) there is an arbitrary function of one complex variable and in equation (3.1.5) two arbitrary functions of one real variable. The former remark follows, since in order to obtain real solutions, g must be chosen the conjugate to f ; that is $g = \bar{f}(\mu - i\vartheta)$. By a transformation $\lambda_1 = (1 - \mu)^{1/2}$, equation (3.1.3) can be reduced to the form $\Psi_{\vartheta\vartheta} + \Psi_{\lambda_1\lambda_1} = 0$ and the general solution is

$$\Psi = f[i(1 - \mu)^{1/2} - \vartheta] + g[i(1 - \mu)^{1/2} + \vartheta]. \quad (3.1.6)$$

2. Differential equation in the supersonic flow.

Introduce in (1.1.4) the variables $\log q$ and θ instead of q and θ , i. e., $\Psi_q = q^{-1} \Psi_{\log q}$ and $\Phi_q = q^{-1} \Phi_{\log q}$. Then we obtain:

$$\Phi_{\theta} = q^{-1} \Psi_{\log q}, \quad \Phi_{\log q} = -(1 - M^2) q^{-1} \Psi_{\theta}. \quad (3.2.1)$$

Differentiating the first equation (3.2.1) with respect to $\log q$ and the second one with respect to θ , and equating leads to

$$q^{-1} (1 - M^2) \Psi_{\theta\theta} + (q^{-1} \Psi_{\log q})_{\log q} = 0. \quad (3.2.2)$$

For convenience, an auxiliary variable $\bar{H} = \bar{H}(q)$ is introduced, given by

$$\frac{d\bar{H}}{dq} = q q^{-1}, \quad \text{or} \quad \bar{H} = \int_0^q q d(\log q). \quad (3.2.3)$$

Since $\partial/\partial(\log q) = q \partial/\partial\bar{H}$, we obtain from (3.2.2) the expression

$$q^{-2} (1 - M^2) \Psi_{\theta\theta} + \Psi_{\bar{H}\bar{H}} = l(\bar{H}) \Psi_{\theta\theta} + \Psi_{\bar{H}\bar{H}} = 0. \quad (3.2.4)$$

We now introduce the quantity λ [compare with (1.2.1)], defined by

$$d\lambda/d\bar{H} = q^{-1} (1 - M^2)^{1/2}, \quad \text{or} \quad d\lambda/dq = q^{-1} (1 - M^2)^{1/2}. \quad (3.2.5)$$

Then since M^2 is given by (1.9.19), we can find the value of λ by a purely formal computation. In the case of a subsonic flow, we obtain the equation (1.3.13), and in the case of a supersonic flow, the expression

$$\lambda(M) = +i \{ \arctan [(M^2 - 1)^{1/2}] - h^{-1} \arctan [h(M^2 - 1)^{1/2}] \}. \quad (3.2.6)$$

If we introduce the new variable Λ defined by

$$\Lambda = i\lambda, \quad (3.2.7)$$

we get

$$\Lambda = h^{-1} \arctan [h(M^2 - 1)^{1/2}] - \arctan [(M^2 - 1)^{1/2}]. \quad (3.2.8)$$

In this case equation (3.2.4) becomes

$$\Psi_{\Lambda\Lambda} - \Psi_{\theta\theta} + 4N_1 \Psi_{\Lambda} = 0, \quad (3.2.9)$$

$$N_1 = \frac{(k+1)}{8} M^4 (M^2 - 1)^{-3/2}. \quad (3.2.9a)$$

3. Solution of the differential equation.

The solution of the differential equation (3.2.9) follows an analogous pattern to that one applied in the case of a subsonic flow. As has been indicated by Bergman¹, there exist various operators for transforming solutions of one equation into

¹ S. Bergman: On two-dimensional supersonic flows. N. A. C. A., T. N. No. 1875 (1949).

solutions of another equation. Often for different purposes it is convenient to use different operators or different forms of the same operator. In the present section, two operators are derived. They transform solutions of the relatively simple hyperbolic equation

$$\Psi_{\Lambda\Lambda} - \Psi_{\theta\theta} = 0, \quad (3.3.1)$$

i. e. a pair of differentiable functions $g(\zeta)$ and $h(\eta)$, $\zeta = \Lambda + \theta$, $\eta = \Lambda - \theta$, of one variable ζ or η , into solutions of the compressibility equations. As soon as the function $\Psi(\Lambda, \theta)$, satisfying equation (3.2.9) is obtained, the corresponding flow in the physical plane can be obtained exactly in the same manner as in the subsonic case. In contrast to the subsonic case, flows which in the logarithmic plane satisfy equation (3.3.1) have not been studied. Relatively little is known concerning how to choose g and h in order to obtain in the physical plane a flow around a prescribed obstacle, although there is reason to expect that this investigation should be simpler than in the subsonic case. On the other hand, it seems that this method of attack would not be of considerable interest in applications since most flows in which we are interested are mixed or supersonic with shocks. These combinations make necessary considerable modifications in the approach.

4. Operator obtained by the use of Riemann's function.

One method of generating the stream-function of a supersonic flow from expressions g and h [solutions of (3.3.1)] is by the use of Riemann's function. To this end, let us transform equation (3.2.9). If in (3.2.9) instead of Λ and θ , the variables ζ and η , defined in section III.3, are introduced, and, instead of Ψ , the "reduced stream-function"

$$\Psi^* = \Psi \exp \left[- \int_a^{\zeta+\eta} N_1(\tau) d\tau \right], \quad (3.4.1)$$

(where a is an arbitrary constant) is considered, then a formal computation shows that Ψ^* satisfies the equation

$$\Psi_{\zeta\eta}^* + F_1(\zeta + \eta) \Psi^* = 0, \quad (3.4.2)$$

$$F_1 = -N_1^2 - \frac{dN_1}{d(2\Lambda)} = \quad (3.4.3)$$

$$= \frac{(k+1)}{64} \left[\frac{5(k+1)}{B^6} + \frac{12k}{B^4} + \frac{6k-14}{B^2} + (4k+8) - (3k-1)B^2 \right], \quad B^2 = M^2 - 1.$$

Obviously it is allowable to take for the lower limit a of the integral in equation (3.4.1) an arbitrary point, since replacing a by a^* , $a^* \neq a$, means only that Ψ^* is multiplied by a constant, namely $\exp \left[\int_a^{a^*} N_1(\tau_1) d\tau_1 \right]$. The so-called "Riemann Integration method"² essentially permits the derivation of an integration formula which expresses the solution of the hyperbolic type of equation in a clear way by means of the initial data. Consider the most general form of a linear, hyperbolic differential equation of the second order in two independent variables:

$$u_{xy} + a u_x + b u_y + c u = 0. \quad (3.4.4)$$

Suppose that we know that a solution of (3.4.4) exists. The "characteristic curves" of the equation (3.4.4) are the lines $x = \text{const.}$, and $y = \text{const.}$ Assume two

² R. Courant and D. Hilbert: *Methoden der Mathematischen Physik*, Vol. I and II. Berlin: Julius Springer, Berlin (1931 and 1937).

arbitrary characteristic lines $x = \text{const.}$ and two $y = \text{const.}$ The so-obtained parallelogram has four vertices: A and B on one diagonal and $P(\xi, \eta)$, $D(x_0, y_0)$ on another. Assume that we know the initial value of the function u along the "initial curve" ADB . By means of the theory of characteristics we can determine also the value of u_x along AD and the value of u_y along BD . This is the so-called "characteristic initial value problem".

The function v , depending upon the arguments x , y and the parameters ξ , η , satisfying the following conditions

$$v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv = 0, \quad (3.4.5a)$$

$$v_x(x, \eta; \xi, \eta) = b(x, \eta) v(x, \eta; \xi, \eta) \text{ on } AP, \quad (3.4.5b)$$

$$v_y(\xi, y; \xi, \eta) = a(\xi, y) v(\xi, y; \xi, \eta) \text{ on } BP, \quad (3.4.5c)$$

$$v(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1 \text{ at } (P), \quad (3.4.5d)$$

is called the "Riemann function" belonging to the differential equation (3.4.4). The function u satisfying (3.4.4) is then given by the expression

$$u(x, y) = u(D) v(D) + \int_D^A v(u_y + au) dy + \int_D^B v(u_x + bu) dx. \quad (3.4.6)$$

Expression (3.4.6) represents the classical Riemann formula. Consequently, by means of the initial value on the curve ADB we are able to determine the function $u(x, y)$. Let us apply Riemann's formula to (3.4.2), i. e., let $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ be the Riemann function of equation (3.4.2). Then

$$\begin{aligned} \Psi^*(\xi, \eta) &= \Psi^*(\xi_0, \eta_0) R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) + \int_{\eta_0}^{\eta} \Psi_y^*(\xi_0, y) R(\xi_0, y; \xi_0, \eta_0) dy + \\ &+ \int_{\xi_0}^{\xi} \Psi_x^*(x, \eta_0) R(x, \eta_0; \xi_0, \eta_0) dx. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Since for $\Psi^*(\xi_0, \eta_0)$ we may write an arbitrary prescribed constant A and for $\Psi^*(x, \eta_0)$ and $\Psi^*(\xi_0, y)$ we may write two arbitrary continuous functions $g(x)$ and $h(y)$ with the condition that $g(\xi_0) = h(\eta_0) = A$, the formula

$$\begin{aligned} \Psi^*(\xi, \eta) &= AR(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) + \int_{\xi_0}^{\xi} g_x(x) R(x, \eta_0; \xi_0, \eta_0) dx + \\ &+ \int_{\eta_0}^{\eta} h_y(y) R(\xi_0, y; \xi_0, \eta_0) dy, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

represents an integral operator which transforms two arbitrary functions g and h of a real variable into a solution of equation (3.4.2). Thus according to (3.4.8) the values of $\Psi^*(\xi, \eta)$ are determined within a rectangle having vertices at $\xi_0, \eta_0; \xi, \eta_0; \xi_0, \eta; \xi, \eta$, by prescribing its values along the line segments: $y = \eta_0, \xi_0 \leq x \leq \xi$, and $x = \xi_0, \eta_0 \leq y \leq \eta$. It is possible to show that the Riemann function of equation (3.4.2) can be written in the form

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R^{(n)}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0), \quad (3.4.9)$$

where

$$R^{(0)}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = 1, \quad (3.4.10a)$$

$$R^{(1)}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{\eta_0}^{\eta} F_1(x+y) dx dy, \quad (3.4.10b)$$

$$R^{(2)}(\beta, \eta; \beta_0, \eta_0) = \int_{\beta_0}^{\beta} \int_{\eta_0}^{\eta} F_1(x+y) R^{(1)}(x, y; \beta_0, \eta_0) dx dy, \quad (3.4.10c)$$

$$R^{(n)}(\beta, \eta; \beta_0, \eta_0) = \int_{\beta_0}^{\beta} \int_{\eta_0}^{\eta} F_1(x+y) R^{(n-1)}(x, y; \beta_0, \eta_0) dx dy. \quad (3.4.10d)$$

The tabulation of $R = R(\beta, \eta; \beta_0, \eta_0)$ is rather complicated since R is a function of four variables. Below, for the illustrative purpose, the second term $R^{(1)}$ of the expansion (3.4.9) is computed.

5. Evaluation of the function $R^{(1)}(\beta, \eta; \beta_0, \eta_0)$.

In this section, the second term $R^{(1)}(\beta, \eta; \beta_0, \eta_0)$ in the series for the Riemann function will be evaluated. The function F_1 is a function of the variable $\lambda = \frac{\beta + \eta}{2}$ and therefore

$$\int_{\beta_0}^{\beta} F_1(x+y) dx = \Gamma^{(1)}(\beta+y) - \Gamma^{(1)}(\beta_0+y), \quad (3.5.1)$$

where

$$\int_{t_0}^{t_1} F_1(\tau) d\tau = \Gamma^{(1)}(t_1) - \Gamma^{(1)}(t_0), \quad (3.5.1a)$$

and

$$\begin{aligned} \int_{\eta_0}^{\eta} dy \int_{\beta_0}^{\beta} F_1(x+y) dx &= \int_{\eta_0}^{\eta} [\Gamma^{(1)}(\beta+y) - \Gamma^{(1)}(\beta_0+y)] dy = \\ &= \Gamma^{(2)}(\beta+\eta) - \Gamma^{(2)}(\beta+\eta_0) - \Gamma^{(2)}(\beta_0+\eta) + \Gamma^{(2)}(\beta_0+\eta_0), \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

where

$$\int_{t_0}^{t_1} \Gamma^{(1)}(\tau) d\tau = \Gamma^{(2)}(t_1) - \Gamma^{(2)}(t_0). \quad (3.5.2a)$$

For $\lambda = 0$, i. e., $M = 1$ [see (3.2.8)], the quantities $N_1(M) = N_1(1)$, (3.2.9a) $F_1(B) = F_1(0)$, (3.4.3) or $F_1(\lambda) = F_1(0)$ tend to infinity and this fact causes a certain amount of inconvenience in the tabulation of the functions $\Gamma^{(1)}$ and $\Gamma^{(2)}$. According to (3.4.3), for $k = 1.4$,

$$F_1(B) = 0.45 B^{-6} + 0.63 B^{-4} - 0.21 B^{-2} - 0.51 - 0.12 B^2, \quad (3.5.3)$$

and

$$\lambda = \sqrt{6} \arctan[(\sqrt{6})^{-1} B] - \arctan B. \quad (3.5.4)$$

The values of M , B , F_1 , $\Gamma^{(1)}(2\lambda)$, $\Gamma^{(2)}(2\lambda)$ are tabulated in ¹, where an ordinary numerical procedure was applied.

6. Second type of integral operator.

In analogy to the subsonic case, where formula (1.9.2) yields a representation for solutions of equation (1.9.1) in terms of an arbitrary analytic function of one complex variable, there is derived in this section a representation for solutions of equation (3.2.9) in terms of two arbitrary differentiable functions of a real variable. Obviously, instead of equation (3.2.9), equation (3.4.2) for the reduced stream-function Ψ^* may be considered. The desired representation can be obtained as a consequence of the following theorem:

Let $E^{(n)}(\tau)$, $\tau = 2\lambda$, denote functions defined by the following recurrence relations

$$E_{\tau}^{(1)}(\tau) = -F_1(\tau), \text{ or } E^{(1)}(\tau) = - \int_0^{\tau} F_1(\tau_1) d\tau_1, \quad (3.6.1)$$

$$E_{\tau}^{(n+1)}(\tau) = -E_{\tau\tau}^{(n)}(\tau) - F_1(\tau) E^{(n)}(\tau), \quad (3.6.1a)$$

or

$$E^{(n+1)}(\tau) = - \int_0^{\tau} [E_{\tau\tau}^{(n)}(\tau_1) + F_1(\tau_1) E^{(n)}(\tau_1)] d\tau_1, \quad (3.6.1b)$$

where $F_1(\tau)$ is the given function which must satisfy the inequality

$$|F_1(\tau)| \leq \frac{2\mu\tau_{00}^2}{|\tau_{00} - \tau|^2}, \quad \text{for } 0 \leq \tau \leq \tau_0, \quad (3.6.2)$$

where μ and τ_{00} are conveniently chosen constants, and the derivatives of F_1 must satisfy the inequalities

$$\left| \frac{d^n F_1(\tau)}{d\tau^n} \right| \leq \frac{2(n+1)! \mu \tau_{00}^2}{|\tau_{00} - \tau|^{n+2}}, \quad \text{for } 0 \leq \tau \leq \tau_0, \quad (3.6.2a)$$

i. e., for τ real and positive. Then the series

$$V^{(1)}(\zeta, \eta) = f(\zeta) + \sum_1^{\infty} E^{(n)}(\zeta + \eta) f^{(n)}(\zeta), \quad (3.6.3)$$

and

$$V^{(2)}(\zeta, \eta) = g(\eta) + \sum_1^{\infty} E^{(n)}(\zeta + \eta) g^{(n)}(\eta), \quad (3.6.4)$$

where f and g are two arbitrary differentiable functions of a real variable and

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(\zeta) &= \int_0^{\zeta} f^{(n)}(\zeta_1) d\zeta_1, \quad f^{(0)}(\zeta) = f, \\ g^{(n+1)}(\eta) &= \int_0^{\eta} g^{(n)}(\eta_1) d\eta_1, \quad g^{(0)}(\eta) = g, \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

represent the solutions of (3.4.2). The proof of this theorem is carried out under the assumption that the series (3.6.3) and (3.6.4), as well as those for their first derivatives, converge uniformly. This assumption permits one to interchange the operations of summation and differentiation. A formal computation yields

$$V_{\zeta}^{(1)} = f_{\zeta} + \sum_1^{\infty} (E_{\zeta}^{(n)} f^{(n)} + E^{(n)} f_{\zeta}^{(n)}), \quad (3.6.6)$$

or with the use of (3.6.5), i. e., $f_{\zeta}^{(n)} = f^{(n-1)}$, we obtain

$$V_{\zeta}^{(1)} = f_{\zeta} + f^{(0)} E^{(1)} + \sum_1^{\infty} f^{(n)} (E_{\zeta}^{(n)} + E^{(n+1)}). \quad (3.6.6a)$$

The second differentiation (with respect to η) gives

$$V_{\zeta\eta}^{(1)} = f E_{\eta}^{(1)} + \sum_1^{\infty} f^{(n)} (E_{\zeta\eta}^{(n)} + E_{\eta}^{(n+1)}). \quad (3.6.7)$$

Also

$$F_1 V^{(1)} = f F_1 + \sum_1^{\infty} f^{(n)} F_1 E^{(n)}. \quad (3.6.8)$$

Substituting (3.6.6a) and (3.6.8) into (3.4.2) yields:

$$V_{\zeta\eta}^{(1)} + F_1 V^{(1)} = f [E_{\eta}^{(1)} + F_1] + \sum_1^{\infty} f^{(n)} [E_{\zeta\eta}^{(n)} + E_{\eta}^{(n+1)} + F_1 E^{(n)}]. \quad (3.6.9)$$

Since $\tau = 2A = \zeta + \eta$, we have $E_{\zeta}^{(n)}(2A) = E_{\zeta}^{(n)}(\tau) = E_{\tau}^{(n)}$, $E_{\zeta\eta}^{(n)} = E_{\tau\tau}^{(n)}$. Thus the first bracket on the right-hand side of (3.6.9) vanishes due to (3.6.1) and the second one vanishes due to (3.6.1a).

7. The proof of the uniform convergence.

In section III.6, the assumption was made that the series (3.6.3) and (3.6.4), as well as their first derivatives, converge uniformly. Of course, it is sufficient to prove that the series and both their formal (i. e., term-by-term) derivatives converge uniformly. Assume that in a certain interval I there hold for certain functions $A(\tau)$ and $\bar{A}(\tau)$, and all their derivatives the inequalities

$$|A(\tau)| < \bar{A}(\tau), \quad \left| \frac{d^n A(\tau)}{d\tau^n} \right| \leq \frac{d^n \bar{A}(\tau)}{d\tau^n}, \quad (3.7.1)$$

for τ contained in the interval I (which symbolically will be denoted by $\tau \in I$), then, as is already known from the section I., the function $\bar{A}(\tau)$ is a dominant of $A(\tau)$, which fact is symbolized by writing $\bar{A} \gg A$, $\tau \in I$. If $\bar{E}^{(1)}(\tau)$ is given by

$$\bar{E}^{(1)}(\tau) = \int_0^\tau \bar{F}_1(\tau_1) d\tau_1, \quad \bar{F}_1(\tau) \gg F_1(\tau), \quad (3.7.2)$$

then

$$|E^{(1)}(\tau)| \leq \bar{E}^{(1)}(\tau), \quad \tau \in I, \quad (3.7.3)$$

and also

$$\left| \frac{d^n E^{(1)}(\tau)}{d\tau^n} \right| \leq \frac{d^n \bar{E}^{(1)}(\tau)}{d\tau^n}. \quad (3.7.4)$$

Thus $\bar{E}^{(1)}(\tau)$ is a dominant of $E^{(1)}(\tau)$, i. e., $\bar{E}^{(1)} \gg E^{(1)}$. Suppose now, that

$$E^{(n+1)}(\tau) = \int_0^\tau [\bar{E}_{\tau_1 \tau_1}^{(n)}(\tau_1) + F_1(\tau_1) E^{(n)}(\tau_1)] d\tau_1 + H^{(n+1)}(\tau), \quad (3.7.5)$$

where $E^{(n)}(\tau) \ll \bar{E}^{(n)}(\tau)$, $0 \ll \bar{H}^{(n)}(\tau)$. Then it follows immediately from (3.6.1b) and (3.7.5) that

$$|E^{(n+1)}(\tau)| \leq \bar{E}^{(n+1)}(\tau), \quad (3.7.6)$$

$$\left| \frac{dE^{(n+1)}(\tau)}{d\tau} \right| \leq \frac{d\bar{E}^{(n+1)}(\tau)}{d\tau}; \quad (3.7.6a)$$

and by considering the corresponding derivatives of $[E_{\tau\tau}^{(n)} + F_1 E^{(n)}]$ in comparison with $[E_{\tau\tau}^{(n)} + F_1 E^{(n)}]$ it follows that

$$E^{(n+1)}(\tau) \ll \bar{E}^{(n+1)}(\tau). \quad (3.7.7)$$

Thus starting with the assumption that $E^{(n)} \ll \bar{E}^{(n)}$, we have proved by induction that $E^{(n+1)} \ll \bar{E}^{(n+1)}$. Now by expression (3.6.2) we may assume that F_1 is dominated by the right-hand side of (3.6.2), i. e.,

$$F_1(\tau) \ll \frac{2\mu\tau_{00}^2}{|\tau_{00} - \tau|^2} = \bar{F}_1(\tau). \quad (3.7.8)$$

Suppose now that $\bar{H}^{(n)}(\tau)$ is given by

$$\bar{H}^{(n)} = \frac{c_n}{\tau_{00}^n} \gg 0, \quad (3.7.9)$$

where the c_n 's are some conveniently chosen positive constants, which will be determined later. Then, an explicit expression may be obtained for $E^{(n),1}$ and namely with $\bar{E}^{(0)} = 1$ and $c_1 = 2\mu\tau_{00}^2$ (3.7.9) we have from (3.7.5)

$$E^{(1)} = \int_0^\tau F_1(\tau_1) d\tau_1 + H^{(1)} = 2\mu\tau_{00}^2(\tau_{00} - \tau)^{-1}. \quad (3.7.10)$$

Assume that

$$\bar{E}^{(n)}(\tau) = c_n (\tau_{00} - \tau)^{-n}, \quad (3.7.10a)$$

and in order to obtain the recurrence relation holding between the c_n , write with the use of (3.7.9)

$$\bar{E}^{(n+1)}(\tau) = \int_0^\tau c_n \left[\frac{n(n+1)}{(\tau_{00} - \tau_1)^{n+2}} + \frac{2\mu\tau_{00}^2}{(\tau_{00} - \tau_1)^{n+2}} \right] d\tau_1 + \bar{H}^{(n+1)} = c_{n+1} (\tau_{00} - \tau)^{-(n+1)}, \quad (3.7.11)$$

$$c_{n+1} = c_n [n + 2\mu\tau_{00}^2(n+1)^{-1}]. \quad (3.7.12)$$

Relation (3.7.12) supplies the quantity $c_1 = 2\mu\tau_{00}^2$ if the assumption is made that $c_0 = 1$. Consider large values of n , which permit us to write

$$2\mu\tau_{00}^2(n+1)^{-1} \leq 1, \quad (3.7.13)$$

or

$$\begin{aligned} c_{n+1} &\leq c_n(n+1) \leq c_{n-1}n(n+1) \\ &\leq c_{n-2}(n-1)n(n+1) \leq \dots \leq c_0 1.2.3 \dots n(n+1). \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

Therefore we see that for every value of μ we can put down

$$c_{n+1} \leq \mu^*(n+1)!, \quad (3.7.15)$$

where $\mu^* \geq c_0$ is a conveniently chosen constant.

The function $f(\beta)$ is assumed to be differentiable and finite, which means that for all values of β less than a certain value β_2 , say, the values of the function $f(\beta)$ are less than a certain constant value μ_2 , say, which can be written symbolically in the form

$$|f(\beta)| < \mu_2 \quad \text{for} \quad |\beta| \leq \beta_2. \quad (3.7.16)$$

From the expression (3.6.5) in conjunction with (3.7.16) we obtain

$$|f^{(1)}| \leq \mu_2 \beta, \quad |f^{(2)}| \leq \mu_2 \frac{\beta^2}{2}, \quad |f^{(3)}| \leq \mu_2 \frac{\beta^3}{2 \cdot 3}, \dots \quad (3.7.17)$$

or in general:

$$|f^{(n)}(\beta)| \leq \frac{\mu_2 \beta^n}{n!} \quad \text{for} \quad |\beta| \leq \beta_2. \quad (3.7.17a)$$

Consequently, substituting (3.7.10a), (3.7.15) and (3.7.17) into (3.6.3) we obtain

$$V^{(1)}(\beta, \eta) \leq \mu_2 \left[1 + \frac{2! \mu^* |\beta|}{1! (\tau_{00} - \tau)} + \dots + \frac{(n+1)! \mu^* |\beta|^n}{n! (\tau_{00} - \tau)^n} + \dots \right]. \quad (3.7.18)$$

The series inside the square bracket itself has a dominant, namely the series

$$\left[1 + \frac{2! \mu^* |\beta|}{1! |\tau_{00} - \tau|} + \dots + \frac{(n+1)! \mu^* |\beta|^n}{n! |\tau_{00} - \tau|^n} + \dots \right], \quad (3.8.18')$$

which converges if

$$\frac{|\beta|}{|\tau_{00} - \tau|} < 1, \quad \text{or} \quad -1 < \frac{\beta}{|\tau_{00} - \tau|} < 1. \quad (3.7.19)$$

The series inside the square bracket of equation (3.7.18) converges if

$$-1 < \frac{A + \theta}{\tau_{00} - 2A} < 1, \quad \text{for} \quad 2A < \tau_0 = 2A_0. \quad (3.7.20)$$

Thus we proved that the series $V^{(1)}$ has a dominant which converges and has all terms positive. According to the fundamental concepts of analysis, the series $V^{(1)}$ is uniformly convergent.

8. The domain of convergence.

The series $V^{(1)}$ converges in the domain given by (3.7.20). Assume that the quantity τ_{00} is negative: $\tau_{00} < 0$. Then the domain of convergence is bounded by the following two straight lines in the $\tau (= 2A)$, θ -system of coordinates: $\frac{3}{2}\tau + \theta - \tau_{00} = 0$, $\frac{1}{2}\tau - \theta - \tau_{00} = 0$. Similarly, we may prove that the series $V^{(2)}$, given by (3.6.4), converges uniformly in the domain

$$\frac{|\eta|}{|\tau_{00} - \tau|} < 1, \quad (3.8.1)$$

or

$$-1 < \frac{A - \theta}{|\tau_{00} - \tau|} < 1, \quad (3.8.1a)$$

which is bounded by two straight lines: $\frac{3}{2}\tau - \theta - \tau_{00} = 0$, $\frac{1}{2}\tau + \theta - \tau_{00} = 0$. The intersection of both domains determines the domain in which both series converge. The upper limit on the positive part of the $(2A)$ -axis is given by the quantity $\tau_0 = 2A_0$ (i. e., vertical line). In a particular case we may assume $\tau_{00} = 0$, which implies that the domain of convergence is a triangle bounded by the following three lines: $\frac{1}{2}\tau \pm \theta = 0$, and $\tau = \tau_0$.

The last question which should be mentioned is the investigation of the behavior of the function $F_1(2A)$. That is, we should show whether and where its derivatives satisfy the inequalities (3.6.2a). This question is too complicated to be discussed here, and the reader who is more advanced mathematically is referred to the original literature¹, where proof is presented that the derivatives of F_1 satisfy the inequalities (3.6.2a).

9. Solution regular at $A = \tau = 0$.

The solution (3.6.3) and (3.6.4) and the theorem presented in section III. 6, cannot be applied directly to equation (3.4.2), as F_1 given by (3.4.3) has a pole for $A = 0$. That is, if M varies from 1 to ∞ , the quantity $B = (M^2 - 1)^{1/2}$ varies from 0 to ∞ , and A , given by (3.2.8) varies from 0 to $\frac{1}{2}(h^{-1} - 1)\pi$. Thus for $A = 0$, the quantity $B = 0$ and the function $F_1 \rightarrow \infty$. In some cases, however, it is possible to overcome this difficulty by shifting the origin. Let a be a positive number a and

$$\zeta^* = \zeta - \frac{1}{2}a, \quad \eta^* = \eta - \frac{1}{2}a, \quad (3.9.1)$$

so that A^* will mean $A^* = A - \frac{a}{2}$, $\tau^* = \tau - a$. Equation (3.4.2) then assumes the form

$$W_{\zeta^*, \eta^*} + F_2(\zeta^*, \eta^*) W = 0, \quad (3.9.2)$$

where $W(\zeta^*, \eta^*) = \Psi^*(\zeta^* + \frac{1}{2}a, \eta^* + \frac{1}{2}a)$, $F_2(\tau^*) = F_1(\tau^* + a)$, so that F_2 is analytic for $\tau^* = 0$. The corresponding changes in $E^{(n)}$ will be indicated by writing $\underline{E}^{(n)}(\tau)$ thus:

$$E^{(1)}(\tau^*) = - \int_0^{\tau^*} F_2(\tau_1^*) d\tau_1^* = - \int_a^{\tau} F_1(\tau_1) d\tau_1 = \underline{E}_1(\tau), \quad (3.9.3)$$

$$\begin{aligned} E^{(n+1)}(\tau^*) &= - \int_0^{\tau^*} [E_{\tau_1^* \tau_1^*}^{(n)}(\tau_1^*) + F_2(\tau_1^*) E^{(n)}(\tau_1^*)] d\tau_1^* = \\ &= - \int_a^{\tau} [\underline{E}_{\tau_1 \tau_1}^{(n)}(\tau_1) + F_1(\tau) \underline{E}^{(n)}(\tau_1)] d\tau_1 = \underline{E}^{(n+1)}(\tau). \end{aligned} \quad (3.9.3a)$$

The domain of convergence, remaining the same, referred to the τ^* system, is merely a shift of the original domain. It may be desirable to have explicit formulas for the $\underline{E}^{(n)}$ and their derivatives, as these may be employed in computation; if n is given the values $n = 1, 2, 3, \dots$ in (3.9.3a), then

$$\underline{E}^{(1)}(\tau) = - \int_a^\tau F_1(\tau_1) d\tau_1, \quad (3.9.4)$$

$$\underline{E}^{(2)}(\tau) = F_1(\tau) - F_1(a) + 1/2 [\underline{E}^{(1)}(\tau)]^2, \quad (3.9.5)$$

$$\begin{aligned} \underline{E}^{(3)}(\tau) = & F_1(\tau) \underline{E}^{(1)}(\tau) - F_{1\tau}(\tau) + F_{1\tau}(a) - \\ & - \int_a^\tau F_1^2(\tau_1) d\tau_1 - F_1(a) \underline{E}^{(1)}(\tau) + 1/6 [\underline{E}^{(1)}(\tau)]^3, \end{aligned} \quad (3.9.6)$$

where

$$\underline{E}_\tau^{(1)}(\tau) = -F_1(\tau), \quad (3.9.7)$$

$$\underline{E}_\tau^{(2)}(\tau) = F_{1\tau}(\tau) - F_1(\tau) \underline{E}^{(1)}(\tau), \text{ etc.} \quad (3.9.8)$$

The expressions for $\underline{E}^{(4)}$ and $\underline{E}_\tau^{(3)}(\tau)$, $\underline{E}_\tau^{(4)}(\tau)$, are cited in³. Attention must be called to the fact that in those formulas instead of A , the quantity τ should be substituted. In the same report Bergman cites the expressions for $\underline{E}^{(1)}(A)$, $F_{1,A}(A)$ and $\int_a^A F_1^2(A_1) dA_1$.

Assume for the quantity in (3.9.1) the value $a = (h^{-1} - 1)\pi$, so that

$$\tau^* = 2A^* = 2A - (h^{-1} - 1)\pi. \quad (3.9.9)$$

This means that the function $F_2(\tau^*)$ has a singularity for $A = 0$ or $\tau^* = 2A^* = -(h^{-1} - 1)\pi$, corresponding to an extreme case $M \rightarrow \infty$. This transformation may be very convenient in some cases and a more thorough discussion of it may be found in¹. Let us mention that because the quantity $A = 1/2(h^{-1} - 1)\pi$ represents an upper bound for A , it is obvious that for the upper bound of the variable τ , the quantity $\tau_0 = (h^{-1} - 1)\pi$ may be chosen. That quantity τ_0 should be used in the considerations presented in section III.6. It is obvious that $F_2(\tau^*) - F_2(2A^*) = F_2[2A - \pi(h^{-1} - 1)] = F_1(2A)$ is an analytic function of A which is certainly regular in the circle of radius $\frac{1}{2}\pi(h^{-1} - 1)$.

10. Transformation to the physical plane.

In order to carry out the transition to the physical plane, the values of Ψ_q^* and Ψ_θ^* are needed. Without going into too many details which may be found in the original literature³, we shall present here the final results with \bar{H} given by (3.2.3):

$$\Psi_q^* = B\bar{H}(q-1) \left[-\frac{(k+1)}{4} \frac{(B^2+1)}{B^3} V + M_1 + 2M_2 + 3M_3 + M_4 \right], \quad (3.10.1)$$

$$\Psi_\theta^* = \bar{H} [M_1 - M_4], \quad (3.10.2)$$

where $V = \sum_i W^{(i)}(\zeta^*, \eta^*)$, $i = 1, 2$, represents the solution of (3.9.2) and the values of M_i 's are given in the original papers of Bergman. (See the section discussing the tables available.) If the integration is varried out along a streamline, $\Psi^* = \text{const.}$,

³ S. Bergman: On supersonic and partially supersonic flows. N. A. C. A., T. N. No. 1096 (1946).

then the corresponding values of x and y , that is, the image in the physical plane of the hodograph flow, are given by the formulas³

$$x = \int (\varrho q^2 \Psi_\theta^*)^{-1} [B^2 \Psi_\theta^{*2} - q^2 \Psi_a^{*2}] \cos \theta dq, \quad (3.10.3)$$

$$y = \int (\varrho q^2 \Psi_\theta^*)^{-1} [B^2 \Psi_\theta^{*2} - q^2 \Psi_a^{*2}] \sin \theta dq. \quad (3.10.4)$$

11. Alternative formulas.

Sometimes the range of variability of the speed is comparatively small. In these instances, it is useful to replace F_1 by a constant, say F_0 . Equation (3.4.2) then becomes

$$\Psi_{\beta\eta}^* + F_0 \Psi^* = 0, \quad (3.11.1)$$

and its solution can be written in the form

$$\Psi^*(\beta, \eta) = \int_{t=-1}^{t=+1} \left\{ \cos \left[\frac{2t(\beta\eta)^{1/2}}{F_0} \right] \right\} \left\{ f \left[\frac{\beta}{F_0} \frac{(1-t^2)}{2} \right] + g \left[\frac{\eta}{F_0} \frac{(1-t^2)}{2} \right] \right\} \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}, \quad (3.11.2)$$

where f and g are two arbitrary, twice-continuously differentiable functions of one variable. When applying formula (3.11.2), the independent variables of functions f and g should be substituted by the expressions $\left[\frac{1}{2} \beta F_0^{-1} (1-t^2) \right]$ and $\left[\frac{1}{2} \eta F_0^{-1} (1-t^2) \right]$, respectively.

In many instances, it is necessary to have representations of the solutions which are valid in the whole strip $-\infty < \theta < \infty$, $0 < 2\Lambda < 2\pi(h^{-1} - 1)$, say. One possibility of obtaining such formulas consists in approximating $F_2(2\Lambda')$, $2\Lambda' = 2\Lambda - (h^{-1} - 1)\pi$, by a sequence of functions $F_2^{(m)}(2\Lambda')$, each of which satisfies the inequalities (3.6.2) and (3.6.2a), and which are chosen in such a manner that

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_2^{(m)}(2\Lambda') = F_2(2\Lambda'), \quad (3.11.3)$$

in the interval $0 < 2\Lambda' < 2(h^{-1} - 1)\pi$. Let $\Psi^{*(m)}(\beta', \eta')$ denote the solutions of

$$\Psi_{\beta'\eta'}^{*(m)} + F_2^{(m)}(\beta' + \eta') \Psi^{*(m)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.11.4)$$

where β' and η' are taken in the interval $-\beta^{(0)} < \beta' < \beta^{(0)}$, $-\eta^{(0)} < \eta' < \eta^{(0)}$, and $\beta^{(0)}$ and $\eta^{(0)}$ are values, corresponding to the quantity $\tau^{(0)} = 2(h^{-1} - 1)\pi$, equivalent to $\tau_0 = 2\Lambda_0$ in the section III.7. The quantity $\tau^{(0)}$ is the upper bound for the variable $\tau' = 2\Lambda' < \tau^{(0)} = 2(h^{-1} - 1)\pi$. The functions $\Psi^{*(m)}$ are also to satisfy the conditions:

$$\Psi^{*(m)}(\beta', 0) = \Psi^*(\beta', 0), \quad \Psi^{*(m)}(0, \eta') = \Psi^*(0, \eta'). \quad (3.11.5)$$

Then, in a manner similar to that in Part I, it can easily be shown that

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Psi^{*(m)}(\beta', \eta') = \Psi^*(\beta', \eta'), \quad (3.11.6)$$

in the given interval. A sequence of functions $F_2^{(m)}(2\Lambda')$ can be obtained in the following manner: Let

$$F_2(2\Lambda') = \alpha_0 + \alpha_1 \Lambda' + \alpha_2 \Lambda'^2 + \dots, \quad (3.11.7)$$

be the series development of F_2 around the point $2\Lambda' = 0$, i. e. $2\Lambda = (h^{-1} - 1)\pi$. This series obviously converges in the circle of radius $\Lambda = \frac{1}{2}(h^{-1} - 1)\pi$. Then,

it is relatively easy to show that the series (3.6.3) and (3.6.4), obtained as solutions of equation (3.11.4), with $F_2^{(m)}$ given by equation (see Fig. 1)

$$F_2^{(m)}(2A') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\Gamma(1+n/m)} A'^n, \quad (3.11.8)$$

will converge for every finite positive number $m < \infty$, in the strip $-\infty < \theta < \infty$, $0 < 2A' < \pi(h^{-1} - 1)$. On the other hand, according to a classical theorem of the theory of functions, the relation (3.11.3) holds in this case, so that for the functions $\Psi^{*(m)}(\zeta', \eta')$ obtained in the foregoing manner, the relation (3.11.6) holds in the whole interval $-\zeta^{(0)} < \zeta' < \zeta^{(0)}$, $-\eta^{(0)} < \eta' < \eta^{(0)}$.

Below, we shall give another form of the solution of equation (3.4.2). Suppose that F_m is a function which possesses a continuous first derivative. Let $E_1^*(\zeta, \eta, t)$ and $E_2^*(\zeta, \eta, t)$ be solutions of

$$(1 - t^2) E_{1\eta t}^* - t^{-1} E_{1\eta}^* + 2t\zeta [E_{1\zeta}^* + F_m E_1^*] = 0, \quad (3.11.9)$$

and

$$(1 - t^2) E_{2\zeta t}^* - t^{-1} E_{2\zeta}^* + 2t\eta [E_{2\eta}^* + F_m E_2^*] = 0, \quad (3.11.10)$$

respectively. Let E_1 and E_2 possess continuous second derivatives, and let $E_{1\zeta}^*(\eta t)^{-1}$ and $E_{2\eta}^*(\zeta t)^{-1}$ be finite for $t = 0$. Then

$$\Psi^*(\zeta, \eta) = \int_1^{+1} \left\{ E_1^*(\zeta, \eta, t) f_1 \left[\frac{1}{2} \zeta (1 - t^2) \right] + E_2^*(\zeta, \eta, t) f_2 \left[\frac{1}{2} \eta (1 - t^2) \right] \right\} (1 - t^2)^{-1/2} dt, \quad (3.11.11)$$

where f_k , $k = 1, 2$, are two arbitrary, twice-continuously differentiable functions of their respective arguments, is a solution of the equation

$$\Psi_{\zeta\eta}^* + F_m \Psi^* = 0. \quad (3.11.12)$$

The proof of this theorem is given in⁴. Let $F_m(\beta)$ possess derivatives of all orders in the interval $\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$, $0 < \beta_0 < \beta_1 < \infty$. If a constant c exists such that the inequalities

$$\left| \frac{d^K F_m}{d\beta^K} \right| \leq \frac{c(K+1)!}{\beta^{K+2}}, \quad K = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (3.11.13)$$

can be obtained, then there exist solutions E_1 and E_2 of (3.11.9) and (3.11.10), respectively, satisfying the conditions of the theorem cited above. Thus, we obtain a solution for Ψ^* in terms of two arbitrary, twice-differentiable functions. In⁵ Bergman shows that (1.9.2) and (3.11.11) are different forms of the same operator, the former valid in the subsonic case, while the latter holds in the supersonic range.

Similarly, as in the subsonic range, if $\Psi_\nu(A, \theta)$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, represents a set of particular solutions of equation (3.2.9), and A_ν , arbitrary constants, any linear combination

$$\sum_{\nu=1}^N A_\nu \Psi_\nu(A, \theta), \quad (3.11.14)$$

is also a solution of equation (3.2.9). This is so since the equations are linear and therefore the principle of superposition of solutions holds. By varying the constants A_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, flows around various shapes can be obtained. On the other hand, it is often necessary to determine constants A_ν to yield a flow which approximates

⁴ S. Bergman: The approximation of function satisfying a linear partial differential equation. Duke Mathematical Journal, Vol. 6 (1940), pp. 537—561.

⁵ S. Bergman: Methods for determination and computation of flow patterns of a compressible fluid. N. A. C. A., T. N. No. 1018 (1946).

that about a prescribed boundary curve, the equation of which is, say, $F(x, y) = 0$. In this case, the problem of how to determine the constants A_v is somewhat complicated and unsolved up to the present. Some remarks on this subject are in¹.

Part IV.

Transonic Flow.

1. General remarks.

The problem of transonic flow is perhaps the most difficult. We have to find solutions which must partly cover the subsonic, and partly the supersonic regions. The complexity of the problem is the origin of several methods of solutions. Below, we shall try to outline and discuss a few of them. In the second half of this part a more general discussion of the problem of transonic flow will be presented without deriving the proofs which a reader who is more advanced mathematically may find in Bergman's original papers.

First we shall present a continuation of the subsonic flow solution through the sonic line, according to the proposition of von Mises⁶.

2. Behavior of the G_n at $m = 1$.

The equation (1.5.3a) provides a recursion formula for the determination of the G_n . It may be written in the form

$$G_{n+1} = \frac{dG_n}{d\lambda} + \int_{\lambda}^{\lambda} f G_n d\lambda, \quad G_0 = 1. \quad (4.2.1)$$

If we compute this last integral, we obtain an integration constant each time, since the lower limit is arbitrary, i. e., G_n would depend on n constants of integration. By means of reasoning identical with that in section I.9, we choose as the lower limit of the integrals the value $\lambda = -\infty$, corresponding to $f = m = 0$ (1.3.11) and (1.3.13). However, at $\lambda = 0$ or $m = 1$, all G_n become infinite. It is therefore desirable to introduce other functions r_n in the place of the G_n which remain bounded (i. e., finite). To find such r_n we have to study the behavior of the G_n near $m = 1$, or, what is the same, the behavior of $f(T)$ and $G_n(T)$ in a neighborhood of $T = 0$. Assuming that

$$G_n = c_n T^{-3n} (1 + b_n T^2 + \dots) = c_n T^{-3n} r_n(T), \quad (4.2.2)$$

we introduce into the recursion formula for the G_n the function $r_n(T)$ defined by

$$r_n(T) = 1 + b_n T^2 + \dots \quad (4.2.3)$$

Since $G_0 = 1$, we have $c_0 = 1$, $r_0 = 1$. From (4.2.2) we obtain:

$$\frac{dG_n}{dT} = c_n T^{-(3n+1)} (-3n r_n + T r_n'), \quad (4.2.4)$$

where r_n' denotes the derivative of r_n with respect to T . According to (1.3.13) we have, after a few transformations,

$$\frac{d\lambda}{dT} = -2 T^2 [(k+1) - 2k T^2 + (k-1) T^4]^{-1}. \quad (4.2.5)$$

By multiplying the right-hand side of (1.3.14a) and (4.2.5), we obtain

$$\begin{aligned} B = f \frac{d\lambda}{dT} &= -\frac{1}{8} (1 - T^2) T^{-4} (1 - k^2 T^2)^{-1} [5(k+1) + 2(5-k) T^2 - (3k-1) T^4] = \\ &= -\frac{5}{8} (k+1) T^{-4} [1 - 2k \{5(k+1)\}^{-1} T^2 \dots]. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

⁶ R. von Mises and M. Schiffer: On Bergman's integration method in two-dimensional compressible fluid flow. *Advances in Applied Mechanics*, Vol. I. New York: Academic Press Inc. (1948).

From

$$G_{n+1} = \frac{dG_n}{d\lambda} = \int_{-\infty}^{\lambda} f G_n d\lambda = \frac{dG_n}{dT} A + \int_1^T B G_n dT, \quad (4.2.7)$$

where

$$A = \frac{dT}{d\lambda} = -\frac{1}{2} [(k+1) - 2kT^2 + (k-1)T^4] T^{-2}, \quad (4.2.7a)$$

we obtain, by using (4.2.3) and (4.2.6):

$$\begin{aligned} c_{n+1} T^{-(3n+3)} (1 + b_{n+1} T^2 + \dots) = & -\frac{1}{2} c_n T^{-(3n+3)} \cdot [-3n(1 + b_n T^2 + \dots) + \\ & + 2b_n T^2 + \dots] [(k+1) - 2kT^2 + (k-1)T^4] - \frac{5}{8} (k+1) c_n \int_1^T x^{-4} \{1 - \\ & - 2k[5(k+1)]^{-1} x^2 + \dots\} (1 + b_n x^2 + \dots) x^{-3n} dx, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

whence

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{c_n} [T^{-(3n+3)} + b_{n+1} T^{-(3n+1)} + \dots] = \\ = T^{-(3n+3)} \left[\frac{1}{2} \cdot 3n(k+1) + \frac{5}{8} (3n+3)^{-1} (k+1) \right] + \\ + T^{-(3n+1)} \left\{ (k+1) \left[\frac{1}{2} (3n-2) + \frac{5}{8} (3n+1)^{-1} \right] b_n - k \left[3n + \frac{1}{4} (3n+1)^{-1} \right] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Comparing the factors of $T^{-(3n+3)}$ on both sides of (4.2.9), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{1}{2} 3n(k+1) + \frac{1}{8} 5(k+1)(3n+3)^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} 3n(k+1) \{1 + 5[36n(n+1)]^{-1}\}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

a recursion formula for the c_n that yields finally

$$c_{n+1} = \left[\frac{1}{2} 3(k+1) \right]^n n! \prod_{v=1}^n \{1 + 5[36v(v+1)]^{-1}\} c_1. \quad (4.2.11)$$

Since $c_0 = 1$, we derive further from (4.2.10)

$$c_1 = \frac{5}{24} (k+1), \quad (4.2.12)$$

which determines all c_n . Comparing now the coefficients of $T^{-(3n+1)}$ and using (4.2.10), we find

$$\begin{aligned} b_{n+1} \{1 + 5[36n(n+1)]^{-1}\} &= b_n \{1 - 2(3n)^{-1} + 5[12n(3n-1)]^{-1}\} - \\ &- \{2k(k-1)^{-1} + k[6n(3n+1)(k+1)]^{-1}\}, \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

which together with $b_0 = 1$ determines all b_n and justifies our particular choice of the functions $r_n(T)$. If n is large, we obtain from (4.2.10)

$$c_{n+1} c_n^{-1} \approx \frac{1}{2} 3n(k+1), \quad (4.2.14)$$

and

$$b_n \approx -2nk(k+1)^{-1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1. \quad (4.2.15)$$

Taking $k = 1.4$, we obtain from (4.2.13): $b_1 = -0.7$, $b_2 = -1.4$, $b_3 = -2.1$, $b_4 = -2.8$, etc.

3. Recursion formula for the functions r_n .

By substituting (4.2.2) into (4.2.7) we obtain:

$$c_{n+1} r_{n+1}(T) T^{-(3n+3)} = A c_n (T^{-3n} r_n' - 3n T^{-(3n+1)} r_n) + c_n \int_1^T B x^{-3n} r_n(x) dx. \quad (4.3.1)$$

Representing the function A (4.2.7a) by a polynomial $A = T^{-2} \sum_{\nu=0}^4 \alpha_\nu T^\nu$, and the function B (4.2.6) by a power series $B = T^{-4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu T^\nu$, and substituting them into (4.3.1), we obtain

$$c_{n+1} c_n^{-1} r_{n+1} = \sum_{\nu=0}^4 \alpha_\nu T^\nu (T r_n' - 3n r_n) + T^{3n+3} \int_1^T x^{-(3n+4)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu x^\nu r_n(x) dx. \quad (4.3.2)$$

In order to compute the $r_n(T)$ from this recursion formula, we have to keep in mind that $r_0 \equiv 1$ and that we obtain from (4.2.10) for $k=1, 4$, the values $c_1/c_0 = 1/2$, $c_2/c_1 = 77/20$, etc. Then we obtain

$$\frac{1}{2} r_1(T) = T^3 \int_1^T x^{-4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu x^\nu dx = T^3 \int_1^T B(x) dx. \quad (4.3.3)$$

Using this result for the next recursive step, we find

$$\frac{77}{20} r_2(T) = \sum_{\nu=0}^4 \alpha_\nu T^\nu (T r_1' - 3 r_1) + T^6 \left(\int_1^T B(\tau) d\tau \right)^2, \quad (4.3.4)$$

where the second term on the right-hand side originates from the expression

$$T^6 \int_1^T x^{-3} B(x) r_1(x) dx = T^6 \int_1^T 2 B(x) \left(\int_1^x B(\tau) d\tau \right) dx, \quad (4.3.4a)$$

by means of integrating by parts. The results, (4.3.3) and (4.3.4), have one remarkable feature. Since $B(T)$, taken in its original form (4.2.6) without developing into a power series, contains only even powers of T , it appears that $r_1(T)$ and $r_2(T)$ are free from logarithmic terms and can be developed into power series at $T=0$. In general, this will not be true. The power series for $r_2(T)$, when introduced into the integral in (4.3.2) in order to determine $r_3(T)$, will produce a logarithmic term. This term, however, is multiplied by T^9 , so that $r_3(T)$ has a regular development at the point $T=0$ up to the ninth order. Further application of the recursion formula will preserve this logarithmic term and will also produce new additional terms of the type $T^\nu (\log T)^\mu$. It is easily verified that we have in general

$$r_n(T) = \sum_{\nu=0}^{n-2} P_\nu^{(n)}(T) (\log T)^\nu, \quad n > 2, \quad (4.3.5)$$

where the $P_\nu^{(n)}(T)$ are regular series of T . One may easily deduce recursion formulas for the $P_\nu^{(n)}$ by means of (4.3.2). Here, we wish to point out only that each $P_\nu^{(n)}(T)$ with $\nu > 0$ has just those powers of T which are larger than 8. We shall restrict ourselves to determining the first coefficients of $P_0^{(n)}(T)$. Let us assume the development

$$P_0^{(n)}(T) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu^{(n)} T^\nu, \quad \varrho_0^{(n)} = 1. \quad (4.3.6)$$

From (4.3.2), we find for the coefficients $\varrho_v^{(n)}$ the following recursion formula as long as $v \leq 8$, $v < 3n + 3$:

$$c_{n+1} c_n^{-1} \varrho_v^{(n+1)} = \sum_{\mu=0}^v \{(\mu - 3n) \alpha_{v-\mu} + \beta_{v-\mu} [v - (3n + 3)]^{-1}\} \varrho_\mu^{(n)}. \quad (4.3.7)$$

Certain numerical values of the coefficients $\varrho_\mu^{(n)}$ are given in⁶, p. 269.

Let us note that it is possible to apply another expansion, since in the neighborhood of $T = 0$ (or $M = 1$), T and T^{-1} can be developed in a series of $\varepsilon = [-3(k+1)(\lambda/2)]^{1/3}$ or $\varepsilon = (-3 \cdot 6 \lambda)^{1/3}$ for $k = 1, 4$. This choice yields $T = \varepsilon + \dots$. If these series are substituted in (1.3.14a) for T and T^{-1} , a development of f in the power series of ε , which holds for $M < 1$, is obtained in the neighborhood of $M = 1$.

4. Methods of analytic continuation.

In the region ($M \leq M_0 < 1$), where M_0 is near 1, the series (1.9.2) converges very slowly, and it is therefore necessary to employ a large number of terms in order to obtain a good approximation for Ψ^* . When applying equation (1.7.7), the number m must be chosen rather large. If this is the case, it is then expedient to replace the expansion (1.9.2) by (1.9.9). Theoretically, this is, however, not the only way of overcoming this difficulty, and in the following other means of doing so will be indicated: this alternative approach employs the method of analytic continuation.

Let $\Psi(q, \theta)$ be determined in a domain, say H , and let Ψ_n , $n = 1, 2, \dots$, be a complete system of particular solutions, each Ψ_n being determined in a domain G . Suppose that H and G actually do overlap, and denote their common part by I . Further, let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Psi_n$ be the series expansion of Ψ in I . Frequently, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Psi_n$ will converge outside of I , say in the domain $H_2 - I$, where H_2 is G or some part of it. If, in addition, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Psi_n$ can be termwise differentiated twice in H_2 , it represents the analytic continuation of Ψ in $H_2 - I$. Frequently, the domain H_2 in which the stream function can be represented in the form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Psi_n$ covers a supersonic region as well, and consequently this method will then yield the flow in this latter region. In this manner, a method for determining a mixed flow may be obtained. Below, we shall present some such methods and at first let us cite an auxiliary lemma:

Let $p(q, \theta)$, $q_0 \leq q \leq q_1$, $-L \leq \theta \leq L$, be an analytic function of two real variables, q and θ , and let

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left[a_v(q) \cos \left(\frac{\pi v \theta}{L} \right) + b_v(q) \sin \left(\frac{\pi v \theta}{L} \right) \right], \quad (4.4.1)$$

$$a_0(q) = \frac{1}{2} L^{-1} \int_{-L}^L p(q, \theta) d\theta, \quad (4.4.1a)$$

$$a_v(q) = L^{-1} \int_{-L}^L p(q, \theta) \cos \left(\frac{\pi v \theta}{L} \right) d\theta, \quad (4.4.1b)$$

$$v = 1, 2, \dots,$$

$$b_v(q) = L^{-1} \int_{-L}^L p(q, \theta) \sin \left(\frac{\pi v \theta}{L} \right) d\theta, \quad (4.4.1c)$$

be its Fourier development. The series (4.4.1) converges uniformly and can be differentiated termwise any finite number of times with respect to both q and θ . The proof of this lemma can be found in any book on Fourier series, and is also cited in⁷. Since every solution of an elliptic equation with analytic coefficients is an analytic function of two real variables, the result obtained can be applied to the case where $p(q, \theta)$ is the stream function $\Psi(q, \theta)$ of a subsonic flow. Thus

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left[a_v(q) \cos \left(\frac{\pi v \theta}{L} \right) + b_v(q) \sin \left(\frac{\pi v \theta}{L} \right) \right], \quad (4.4.2)$$

$$a_0(q) = \frac{1}{2} L^{-1} \int_{-L}^L \Psi(q, \theta) d\theta, \quad (4.4.2a)$$

$$a_v(q) = L^{-1} \int_{-L}^L \Psi(q, \theta) \cos \left(\frac{\pi v \theta}{L} \right) d\theta, \quad (4.4.2b)$$

$$v = 1, 2, \dots,$$

$$b_v(q) = L^{-1} \int_{-L}^L \Psi(q, \theta) \sin \left(\frac{\pi v \theta}{L} \right) d\theta, \quad (4.4.2c)$$

can be differentiated termwise. If, now, following Chaplygin, we introduce instead of q , the variable

$$\tau = q^2 (2 a_0^2)^{-1}, \quad (4.4.3)$$

the then equation (1.1.5) for Ψ assumes the form

$$[2\tau(1-\tau)^{-\beta} \Psi_\tau]_\tau + [1 - (2\beta + 1)\tau] [2\tau(1-\tau)]^{-1} (1-\tau)^{-\beta} \Psi_{\theta\theta} = 0, \quad (4.4.4)$$

where $\beta = (k-1)^{-1}$. Using the representation of $\Psi(q, \theta)$ by means of the Fourier series, given above, and differentiating termwise, gives the result:

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{d}{d\tau} \left(\tau(1-\tau)^{-\beta} \frac{da_v}{d\tau} \right) - [1 - (2\beta + 1)\tau] \cdot [\tau(1-\tau)]^{-1} (1-\tau)^{-\beta} \cdot \right. \right. \\ \left. \cdot \frac{v^2 \pi^2 a_v}{4 L^2} \right] \cos \frac{v \pi \theta}{L} + \left[\frac{d}{d\tau} \left(\tau(1-\tau)^{-\beta} \frac{db_v}{d\tau} \right) - [1 - (2\beta + 1)\tau] [\tau(1-\tau)]^{-1} \cdot \right. \\ \left. \cdot (1-\tau)^{-\beta} \cdot \frac{v^2 \pi^2 b_v}{4 L^2} \right] \sin \frac{v \pi \theta}{L} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

In this equation, the coefficients of $\cos \left(\frac{v \pi \theta}{L} \right)$ and $\sin \left(\frac{v \pi \theta}{L} \right)$, for $v = 1, 2, \dots$, must be equal to zero separately, and therefore the a_v and b_v are each solutions of equations

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \tau(1-\tau)^{-\beta} \frac{da_v}{d\tau} \right\} - \{1 - (2\beta + 1)\tau\} \{\tau(1-\tau)\}^{-1} \cdot (1-\tau)^{-\beta} \frac{v^2 \pi^2 a_v}{4 L^2} = 0, \quad (4.4.6)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \tau(1-\tau)^{-\beta} \frac{db_v}{d\tau} \right\} - \{1 - (2\beta + 1)\tau\} \{\tau(1-\tau)\}^{-1} \cdot (1-\tau)^{-\beta} \frac{v^2 \pi^2 b_v}{4 L^2} = 0. \quad (4.4.7)$$

Each of these equations can easily be transformed into a hypergeometric equation and thus every solution of them may be written in the form

$$(A_v F_v + B_v F_v^*) \tau^{v/(2L)}, \quad (4.4.8)$$

⁷ S. Bergman: On two-dimensional flows of compressible fluids. N. A. C. A., T. N. No. 972 (1945).

where A_ν and B_ν are constants, and

$$F_\nu = F(\alpha_\nu, \beta_\nu; -\beta; 1 - \tau), \quad (4.4.9)$$

$$F_\nu^* = (1 - \tau)^{-\beta+1} F(\gamma_\nu - \alpha_\nu, \gamma_\nu - \beta_\nu; 2 + \beta; 1 - \tau), \quad (4.4.10)$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$ being the hypergeometric series. The symbols used are given by:

$$\gamma_\nu = (\nu L^{-1} + 1), \quad \alpha_\nu = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\nu}{L} - \beta \right) + A_\nu \right], \quad (4.4.11)$$

$$\beta_\nu = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\nu}{L} - \beta \right) - A_\nu \right], \quad A_\nu = \left[\left(\frac{\nu}{2L} \right)^2 (2\beta + 1) + \beta^2 \right]^{1/2}.$$

In order to determine the constants A_ν , B_ν , the following theorem is employed: Let $\Psi^{(1)}(q, \theta)$ and $\Psi^{(2)}(q, \theta)$, $[q_0 \leq q \leq q_1, -L \leq \theta \leq L]$ be solutions of an equation of elliptic type. If, along a line, say $q = q_0$,

$$\Psi^{(1)}(q_0, \theta) = \Psi^{(2)}(q_0, \theta), \quad (4.4.12)$$

and

$$\Psi_q^{(1)}(q, \theta)|_{q=q_0} = \Psi_q^{(2)}(q, \theta)|_{q=q_0}, \quad (4.4.12a)$$

then in the whole domain $[q_0 \leq q \leq q_1, -L \leq \theta \leq L]$,

$$\Psi^{(1)}(q, \theta) = \Psi^{(2)}(q, \theta). \quad (4.4.13)$$

Now, suppose that the function $g(\bar{Z})$, (1.9.2a), is regular in some domain $H_1 + H_2$,

$$H_1 = [q_0 \leq q \leq q_1, -L \leq \theta \leq L], \quad (4.4.14a)$$

$$H_2 = [q_1 \leq q \leq q_2, -L \leq \theta \leq L], \quad (4.4.14b)$$

which domains lie in $[\theta^2 < 3\lambda^2, \lambda < 0]$. Then, by the formula (1.9.2), it follows that Ψ is also regular in $H_1 + H_2$. Suppose that Ψ has been evaluated in the domain H_1 , but it is desired to avoid the evaluation of Ψ in H_2 by means of (1.9.2), since this series converges very slowly in H_2 . To achieve that, represent the function Ψ in H_1 by a Fourier series, which is always possible since we evaluated Ψ in H_1 :

$$\Psi^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[a_\nu(q) \cos\left(\frac{\pi \nu \theta}{L}\right) + b_\nu(q) \sin\left(\frac{\pi \nu \theta}{L}\right) \right]. \quad (4.4.15)$$

Assume that in H_2 we wish to represent Ψ by another Fourier series

$$\Psi^{(2)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[S_\nu^{(1)}(\tau) \cos\left(\frac{\pi \nu \theta}{L}\right) + S_\nu^{(2)}(\tau) \sin\left(\frac{\pi \nu \theta}{L}\right) \right], \quad (4.4.16)$$

$$S_\nu^{(k)}(\tau) = [A_\nu^{(k)} F_\nu + B_\nu^{(k)} F_\nu^*] \tau^{L/2}, \quad k = 1, 2. \quad (4.4.16a)$$

In order that this series will be the solution Ψ under consideration, the constants $A_\nu^{(k)}$ and $B_\nu^{(k)}$ must be determined so that

$$S_\nu^{(1)}(\tau)|_{q=q_0} = a_\nu(q_0), \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (4.4.17a)$$

$$S_\nu^{(2)}(\tau)|_{q=q_0} = b_\nu(q_0), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.4.17b)$$

$$\frac{dS_\nu^{(1)}(\tau)}{d\tau} \bigg|_{q=q_0} = \frac{da_\nu(q)}{dq} \bigg|_{q=q_0}, \quad (4.4.17c)$$

$$\frac{dS_\nu^{(2)}(\tau)}{d\tau} \bigg|_{q=q_0} = \frac{db_\nu(q)}{dq} \bigg|_{q=q_0}. \quad (4.4.17d)$$

Since in $[q_1 \leq q \leq q_2, -L \leq \theta \leq L]$, $\Psi(q, \theta)$ is an analytic function, the series (4.4.16) and its derivatives converge uniformly and absolutely in this domain, and this series represent the solution Ψ under consideration in the region H_2 .

Moreover, this series and its derivatives may also converge outside of H_2 , say in $H_3 = [q_2 \leq q \leq q_3, -L \leq \theta \leq L]$. If H_3 lies partially outside of the domain $[\theta^2 < 3\lambda^2, \lambda < 0]$, then the expression obtained gives the analytic continuation of the solution outside the domain of representation by the integral formulas (1.9.2). In particular, H_3 may include some region which lies in $M > 1$. Of course, in practical application the summation will include only a finite number of terms N , say. Thus the procedure of continuation consists of determining a linear combination $\sum A_\nu \chi_\nu(M, \theta)$, so that along a line $M = M_0 < 1$, this latter function and its derivative with respect to M coincide with the corresponding quantities for the stream function of the subsonic flow pattern which is to be continued.

Another similar method is proposed by Bergman in ⁷ and ⁸.

Unfortunately, the power series for the function of (4.4.6) and (4.4.7) converge so slowly that in most cases this approach must be abandoned for computational purposes. On the other hand, if certain changes in this approach are made, numerical results may be obtained. Two such procedures will be discussed in the following³:

(a) The solutions of (4.4.6) and (4.4.7) are expanded in the form of a power series, not, however, around $\tau = 0$, which is the case of the hypergeometric series, but rather around some conveniently chosen value of τ which lies inside the interval under consideration ($-L \leq \theta \leq L$). For example, it will often be convenient to introduce for τ the variable $\sigma = \tau - 0.15$, say. Since the particular solutions are often considered only for a small range of variation of τ , say $0.13 \leq \tau \leq 0.20$, the coefficients of (4.4.6) and (4.4.7) may be approximated by polynomials in σ , so that if, say, $L = \pi/2$, the equation approximating (4.4.6) and (4.4.7) is (for $\beta = (k-1)^{-1} = 5/2$):

$$(-\sigma^3 + 0.5500\sigma^2 + 0.2325\sigma + 0.0191) \frac{d^2 U}{d\sigma^2} + (1.5000\sigma^2 + 1.4500\sigma + 0.1838) \frac{dU}{d\sigma} - (6.000\sigma + 0.1000) \nu^2 U = 0, \quad (4.4.18)$$

where U denotes a function approximating the actual solution of (4.4.6) and (4.4.7). As is known, every solution of (4.4.18) can be represented as a linear combination of two independent solutions, each of which can be written in the form of an infinite series in σ , which at least converges for $|\sigma| < 0.15$, a range of convergence which will be sufficient for most purposes. Solutions $U_1(\sigma; \nu)$, $U_2(\sigma; \nu)$ are chosen so that

$$U_1(0; \nu) = 0, \quad U_1'(0; \nu) = 1, \quad (4.4.19a)$$

$$U_2(0; \nu) = 1, \quad U_2'(0; \nu) = 0. \quad (4.4.19b)$$

Thus

$$U_1(\sigma; \nu) = \sigma + a_2 \sigma^2 + a_3 \sigma^3 + \dots, \quad (4.4.20)$$

$$U_2(\sigma; \nu) = 1 + b_2 \sigma^2 + b_3 \sigma^3 + \dots, \quad (4.4.21)$$

$a_i, b_i, \dots, i = 2, 3, \dots$, being functions of ν . Substituting (4.4.20) and (4.4.21) into (4.4.18), we obtain a set of equations which give the values of a_i and b_i as polynomials in ν^2 (³, p^{35}). Since it is often sufficient to consider the series (4.4.20) and (4.4.21) in a small interval, say $|\sigma| < 0.05$, it will suffice to employ only a few terms of these series, and hence it is necessary to compute only a small number of a_i, b_i .

(b) To employ the second method mentioned, equations (4.4.6) and (4.4.7) are approximated by the equations

$$(0.15 + \sigma)(0.85 - \sigma) \frac{d^2 u}{d\sigma^2} + (1.225 + 1.5\sigma) \frac{du}{d\sigma} - \nu^2 \left(\frac{0.1 - 6\sigma}{0.15 + \sigma} \right) u = 0, \quad (4.4.22)$$

⁸ S. Bergman: The hodograph method in the theory of compressible fluids. Supplement to „Fluid Dynamico“ by R. v. Mises und K. O. Friedrichs, Brown University (1941—1942).

and two independent solutions of this equation, $u_1(\sigma; \nu)$, $u_2(\sigma; \nu)$, are determined not by the power series (4.4.20) and (4.4.21), but by an approximation method. That is, we write

$$\frac{du}{d\sigma} = v, \quad \text{or} \quad \Delta u = v \Delta \sigma. \quad (4.4.23)$$

Then

$$\Delta v = \left\{ - \left[\frac{(1.225 + 1.5 \sigma)}{(0.15 + \sigma)(0.85 - \sigma)} \right] v + \nu^2 \left[\frac{(0.1 - 6 \sigma)}{(0.15 + \sigma)^2 (0.85 - \sigma)} \right] u \right\} \Delta \sigma. \quad (4.4.24)$$

Assume that $\Delta \sigma$ is contained in a small interval, say 0.001, and that for $\sigma = 0$, we have $u = 0$ and $v = 1$. Then, if (4.4.23) and (4.4.24) are employed, $\Delta u(\sigma)$ and $\Delta v(\sigma)$ may be determined at $\sigma = 0$, and hence

$$u(0.001) = u(0) + \Delta u(0), \quad (4.4.25a)$$

$$v(0.001) = v(0) + \Delta v(0). \quad (4.4.25b)$$

From these values of u and v , $\Delta u(0.001)$ and $\Delta v(0.001)$, and hence $u(0.002)$, $v(0.002)$ may be found and the entire procedure continued until an approximate curve is found for $u(\sigma)$, $0 \leq \sigma \leq 0.15$. In this manner, the desired integration is performed. Both methods described above are appropriate for the purpose of computation, but they are insufficient to give an insight into the behavior of the particular solutions when $\nu \rightarrow \infty$.

5. Application of integral operators to transonic flow. Basic equations.

Below, the application of integral operators to transonic flow will be discussed. In general, the possible method of continuation, which will be discussed, will consist of the determination of the limit values of the subsonic stream function and of its derivatives with respect to M on the line $M = 1$, and then of the consideration of the initial value problem for the compressibility equation in the supersonic portion of the flow, $M > 1$. Since it is advisable to use different variables in the region of transonic flow, we have to begin with the basic equations. Assuming that the thermodynamical conditions follow the isentropic law, and introducing as new variables θ and

$$H = \int_{q_1}^q \varrho (dq/q) = \int_{q_1}^q q^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} (k-1) q^2 \right]^{\frac{1}{(k-1)}} dq, \quad (4.5.1)$$

we obtain the following linear equation for the stream function:

$$\Psi_{HH} + l(H) \Psi_{\theta\theta} = 0, \quad l(H) = (1 - M^2) \varrho^{-2}, \quad (4.5.2)$$

where

$$M = q \left[1 - \frac{1}{2} (k-1) q^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.5.3)$$

It is noted that in considering purely subsonic flow in previous sections, the variable λ (1.2.1) was used; and for purely supersonic flows, the variable $A = i\lambda$. In studying transonic flow patterns, it is found to be more convenient to use the variables H, θ . A formal computation shows that the Taylor development of $l(H)$ in the neighborhood of $H = 0$ is

$$l(H) = [2/(k-1)]^{(2-k)/(k-1)} \{ (-2H) - [(2k+5)/(2k+2)] \cdot [(k+1)/2]^{2k/(k-1)} (-2H)^2 + \dots \}. \quad (4.5.4)$$

In purely subsonic flow, we applied formula (1.9.1) in previous sections. Introducing

the complex variables $Z = \lambda + i\theta$, $\bar{Z} = \lambda - i\theta$, equation (1.9.1) transforms into

$$4\Psi_{\bar{Z}\bar{Z}} + 4N(\Psi_z + \Psi_{\bar{z}}) = 0, \quad (4.5.5)$$

where the following transformation formulas may be helpful:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{Z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} - i \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} + i \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (4.5.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \bar{Z}}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = i \left(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \right). \quad (4.5.5b)$$

It should be noted that the interval $-\infty < \lambda < 0$ corresponds to the interval $-\infty < H < 0$. In the supersonic case, we applied equation (3.2.9). Equations (1.9.1) and (3.2.9) can be transformed. If Ψ is replaced by

$$\Psi^* = \Psi R^{-1}, \quad \partial R / \partial \bar{Z} = N, \quad (4.5.6)$$

then Ψ^* satisfies the equations

$$\Psi_{\lambda\lambda}^* + \Psi_{\theta\theta}^* + 4F\Psi^* = 0, \quad \text{and} \quad \Psi_{\lambda\lambda}^* - \Psi_{\theta\theta}^* - 4F_1\Psi^* = 0, \quad (4.5.7)$$

where

$$F = F_1 = \frac{(k+1)M^4}{64} \left[\frac{-(3k-1)M^4 - 4(3-2k)M^2 + 16}{(1-M^2)^3} \right]. \quad (4.5.8)$$

The expansions of N and F in the neighborhood of $\lambda = 0$ are⁹, p. 861):

$$N = (1/12\lambda) \left\{ 1 - \frac{1}{4}(k+1)^{1/2} \left[\left(2 + \frac{3}{5}2^{1/2} \right) k + 5 \cdot 2^{1/2} - 2 \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot [2^{-1/2}3^{2/3}(k+1)^{-5/6}(-\lambda)^{2/3}] + \dots \right\}, \quad (4.5.9)$$

$$F = 5/[36(-2\lambda)^2] + \dots \quad (4.5.10)$$

In the vicinity of $H = 0$, $l(H)$ may be replaced by the first term in its expansion. Using this value of $l(H)$ in (4.5.2), we obtain the so-called "simplified" compressibility equation:

$$-CH\Psi_{\theta\theta} + \Psi_{HH} = 0, \quad (4.5.11)$$

where C is a constant. In considering transonic flows, the solutions of the simplified equation will give a fair approximation of the exact stream function. The expressions for N , F and H will, in this case, reduce to

$$N = N^+ = 1/(12\lambda), \quad (4.5.12a)$$

$$F = F^+ = 5/36 [1/(-2\lambda)^2], \quad (4.5.12b)$$

$$H = H^+ = (3^{2/3}/2) [2/(k-1)]^{(k-2)/(3k-3)} (-\lambda)^{2/3}. \quad (4.5.12c)$$

In his important investigation, Tricomi¹⁰ studied the boundary value problem of equation (4.5.11) and showed that if we consider a finite domain located partly in the subsonic and partly in the supersonic region, then under certain conditions the boundary value problem has a unique solution. Frankl¹¹ considered questions allied with Tricomi's investigations in the case of the exact compressibility equation.

⁹ S. Bergman: Two-dimensional transonic flow patterns. Amer. J. Math. **70**, pp. 856—891 (1948):

¹⁰ F. Tricomi: Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto. Atti R. Accad. Naz. Lincei, Mem. della Cl. Sci. Fis. Mat. e Nat., Ser. 5, Vol. **14**, 133—247 (1923).

¹¹ F. I. Frankl: On the problems of Chaplygin for mixed sub- and supersonic flows. Bull. Acad. Sci. URSS, **8**, 195—245 (1944) (in Russian). — On the problems of Chaplygin for mixed sub- and supersonic flows. Bull. Acad. Sci. URSS, Vol. **9**, 121—143 (1945) (in Russian). Also: N. A. C. A., T. N. No. 1155 (1947).

We shall discuss below the integral operators (of two kinds). The integral operator of the first kind may be applied to the subsonic flow. It is useful to shift the origin to the point λ_0, θ_0 (point of reference of the operator). Every real solution of equation (4.5.5) can be represented in a neighborhood of the origin $Z' = 0$ as the imaginary part of the right-hand side of (4.5.13) —

$$p(g) = R(Z', \bar{Z}') \left[g(Z') + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)} p^{(n)}(Z', \bar{Z}') g^{[n]}(Z') \right], \quad (4.5.13)$$

with

$$g^{[n]}(Z') = \int_0^{Z'} \int_0^{Z_1} \dots \int_0^{Z_{n-1}} g(Z_n) dZ_n \dots dZ_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_{\beta=0}^{\beta=Z'} (Z' - \beta)^{n-1} g(\beta) d\beta, \quad (4.5.13a)$$

where

$$g(Z') = \int_{t=-1}^{+1} \left[\frac{1}{2} Z' (1 - t^2) \right] dt / (1 - t^2)^{1/2}, \quad (4.5.13b)$$

with a suitably chosen function f (or g). The function $g(Z')$ is called the associate of $p(g)$ with regard to the integral operator of the first kind, p . The function R is defined by the formula

$$R(Z', \bar{Z}') = \exp \left[- \int_0^{\bar{Z}'} N(Z' + \bar{Z}_1') d\bar{Z}_1' \right], \quad (4.5.14)$$

and the symbols Z' and \bar{Z}' denote:

$$Z' = \lambda' + i\theta; \quad Z' = \lambda' - i\theta', \quad \lambda' = \lambda - \lambda_0, \quad \theta' = \theta - \theta_0, \quad \lambda_0 < 0. \quad (4.5.15)$$

Another form of the operator of the first kind is

$$P_1(f) = \int_{-1}^{+1} E_1(Z', \bar{Z}', t) f \left[\frac{1}{2} Z' (1 - t^2) \right] dt / (1 - t^2)^{1/2}, \quad (4.5.16)$$

where f is a suitably chosen associate function, called the generating function of the operator P_1 , and E_1 is equal to

$$E_1(Z', \bar{Z}', t) = R(Z', \bar{Z}') E_1^*(Z', \bar{Z}', t), \quad (4.5.17)$$

where E_1^* has the development

$$E_1^* = 1 + \sum_1^{\infty} Z'^n t^{2n} P^{(n)}(Z', \bar{Z}'). \quad (4.5.18)$$

The functions $P^{(n)}$ satisfy the following recurrence relations:

$$P_{\bar{Z}'}^{(1)} + 2F = 0, \quad (2n+1) P_{\bar{Z}'}^{(n+1)} + 2 P_{Z' \bar{Z}'}^{(n)} + 2F P^{(n)} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.5.19)$$

with

$$P^{(n)}(Z', 0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

By the above requirement, the $P^{(n)}$ and hence the generating functions E_1 (of the first kind) are uniquely determined. All the proofs—for example, the proof that the series (4.5.18) converges absolutely and uniformly in a sufficiently small neighborhood of the origin $Z' = 0, \bar{Z}' = 0$ —can be found in⁹. Thus, assuming that the associate function is regular in a sufficiently large domain, we may prove that by applying to it the integral operator of the first kind, we obtain a solution of (4.5.5) defined in a sufficiently small neighborhood of the origin. As the next step, one can

show that if f is regular in the entire domain $M < 1$, this solution can be continued throughout the whole subsonic region, i. e., the representation holds for $E [M < 1, -\infty < \theta < \infty]$, where the symbol $E [..]$ denotes a domain. There exists still another form of the integral operator of the first kind, namely

$$p(g) = R(Z', Z') \left\{ g_1(Z') - \int_0^{\bar{Z}'} \int_0^{\bar{Z}'} F g_1 dZ_2 dZ_1 + \right. \\ \left. + \int_0^{\bar{Z}'} \int_0^{\bar{Z}'} F \left[\int_0^{\bar{Z}_1} \int_0^{\bar{Z}_1} F g_1 Z_2 dZ_2 \right] dZ_1 dZ_1 + \dots \right\}. \quad (4.5.20)$$

Making some modifications, we can extend the definition of the operator P_1 so that it can be applied to functions of one variable $\Lambda + \theta$ and $\Lambda - \theta$, respectively, thus generating solutions of equation (3.2.9) in the almost entire supersonic region. The expression

$$P_1 [f_1(\Lambda + \theta)] + P_2 [f_2(\Lambda - \theta)], \quad (4.5.21)$$

where f_1 and f_2 are two linearly independent functions, will represent a (possible) stream function of a supersonic flow pattern, i. e., for $E [M > 1, -\infty < \theta < \infty]$. The integral operator of the first kind, convenient though it is for many purposes, has the disadvantage that it does not represent solutions of the compressibility equation in the neighborhood of the sonic line. Furthermore, it has the disadvantage from the practical point of view that the $P^{(n)}(Z', \bar{Z}')$ are functions of two variables Z' and \bar{Z}' , or λ and θ , which makes tabulation of the values of $P^{(n)}$ very time-consuming.

6. Integral operator of the second kind in the case of the simplified compressibility equation.

The two disadvantages of the operator of the first kind can be removed by the use of another operator—to be termed “operator of the second kind”—for which the $P^{(n)}$ are functions of one variable only, and which yields a representation of the stream function in the neighborhood of the sonic line. This operator has a number of other distinctive features, which will best be elucidated by the detailed discussion of the so-called “simplified” compressibility equation, i. e., where $N = N^+ = (12\lambda)^{-1}$, in equation (1.9.1), or, alternatively, where $F = F^+ = 5/(144\lambda^2)$ in equation (4.5.8). At first, let us represent the generating function in the case of the simplified compressibility equation. It is of the form

$$E = HE^*, \quad (4.6.1)$$

where H is given by (1.9.7); it can be given by the formula

$$H(2\lambda) = S_0(-2\lambda)^{-1/6} p[(-2\lambda)^{2/3}], \quad (4.6.2)$$

with

$$p[(-2\lambda)^{2/3}] = 1 + S_1(-2\lambda)^{2/3} + S_2(-2\lambda)^{4/3} + \dots, \quad (4.6.3)$$

$$S_0 = 2^{(2k+1)/(6k-6)} 3^{-1/6} (k+1)^{(2-k)/(6k+6)}, \quad (4.6.3a)$$

$$S_1 = (1/10)(3/4)^{2/3} (k+1)^{-1/3} (2k+5), \quad (4.6.3b)$$

$$S_2 = -(1/1400)(3/4)^{4/3} (k+1)^{-2/3} (64k^2 + 70k + 75), \text{ etc.} \quad (4.6.3c)$$

In the case of the simplified equation, we have $N^+ = (12\lambda)^{-1}$, $p[(-2\lambda)^{2/3}] = 1$, $H^+(2\lambda) = S_0(-2\lambda)^{-1/6}$, $F^+ = 5/(144\lambda^2)$. One can show that in this case, the generating function E can be given in the form

$$E^+(Z', \bar{Z}', t) = E^+(\lambda, \theta, t) = A_1 S_0(-2\lambda)^{-1/6} F(1/6, 5/6, 1/2, X) + \\ + B_1 S_0(-2\lambda)^{-2/3} [-t^2(\lambda + i\theta)]^{1/2} F(2/3, 4/3, 3/2, X),$$

$$\text{for } |X| = | - t^2 (\lambda + i \theta) / (-2 \lambda) | < 1, \quad (4.6.4a)$$

and

$$\begin{aligned} E^+(Z', \bar{Z}', t) = E^+(\lambda, \theta, t) = A_2 S_0 [(-t^2)(\lambda + i \theta)^{-1/6} F(1/6, 2/3, 1/3, X) + \\ + B_2 S_0 (-2 \lambda)^{-2/3} [(-t^2)(\lambda + i \theta)]^{-5/6} F(5/6, 4/3, 5/3, X), \\ \text{for } |X| = | -2 \lambda / -t^2 (\lambda + i \theta) | < 1. \end{aligned} \quad (4.6.4b)$$

One can prove in this case of the simplified equation that the imaginary part of $P_2^+(f)$,

$$P_2^+(f) = \int_{-1}^{+1} E^+(\lambda, \theta, t) f \left[\frac{1}{2} Z (1 - t^2) \right] dt / (1 - t^2)^{1/2}, \quad (4.6.5)$$

$$Z = \lambda + i \theta, \quad (4.6.5a)$$

is a solution of (1.9.1) with $N = N^+ = 1/(12 \lambda)$, i. e.,

$$\Psi = I m [P_2^+(f)]. \quad (4.6.6)$$

The solution obtained is valid in the large, i. e., in a finite domain. In particular, if the function

$$g(Z) = \int_{t=-1}^{+1} f \left[\frac{1}{2} Z (1 - t^2) \right] dt / (1 - t^2)^{1/2}, \quad (4.6.7)$$

is regular in a region B which possesses in its interior a number of branch points, each of finite order, then the obtained solution (4.6.6) is defined in B and possesses branch points at the same points and of the same order as (4.6.7). We assume here that the only singularities of g in B are branch points. In applying the integral operator method in the case where g has poles or logarithmic singularities, certain modifications are needed. If the function (4.6.7) is defined for all values $\lambda < 0$, $-\infty < \theta < \infty$, then the solution Ψ will be defined in the same region.

The expressions (4.6.4) obtained by means of the explained procedure, will not necessarily be analytical continuations of each other. Since, however, the hypergeometric equation has only two linearly independent solutions, the constants, A_1 , B_1 , and A_2 , B_2 can always be adjusted as to make these two solutions analytical continuations of each other.

The integral representation (4.6.5) can immediately be generalized to the supersonic case where it will produce, in an analogous manner, solutions of (3.2.9) with $N_1 = N^+$ (4.5.12a). Indeed, replacing λ by the variable $i A$, it may be verified relatively easily that $\Psi(i A, \theta)$ satisfies equation (3.2.9) with $N_1 = 1/(12 A)$. Repeating the procedure which led to the generating function (4.6.4) in the subsonic case, we now obtain the generating function

$$\begin{aligned} E^+ = [a_1 S_0 / (2 A)^{1/6}] F(1/6, 5/6, 1/2, X) + [b_1 S_0 (A + \theta)^{1/2} t / (2 A)^{2/3}] F(2/3, 4/3, 3/2, X), \\ \text{for } |X| = |t^2 (A + \theta) / (2 A)| < 1. \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

As is known, a hypergeometric series in z defines a function which is analytic when $|z| < 1$. This function has a branch point at $z = 1$ and if a cut (i. e., an impassable barrier) is made from $+1$ to $+\infty$ along the real axis, the function is analytic and one-valued throughout the cut plane. In our case, where $|X|$ is substituted for z , if $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, X)$ denotes only the hypergeometric series and not the hypergeometric function, (4.6.8) has to be replaced for $|X| = |t^2 (A + \theta) / (2 A)| > 1$, by

$$\begin{aligned} E^+ = [a_2 S_0 / (t^2 (A + \theta))^{1/6}] F(1/6, 2/3, 1/3, X) + \\ + [b_2 S_0 (2 A)^{2/3} / (t^2 (A + \theta))^{5/6}] F(5/6, 4/3, 5/3, X), \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

where the constants a_2, b_2 are expressible in terms of a_1, b_1 .

If $\theta = A$ and $t^2 = 1$, there arise certain difficulties, since the hypergeometric functions in (4.6.8) will then become singular. By the transformation formulas of the hypergeometric function, (4.6.8) may be written in the neighborhood of $[(A + \theta)(2A)^{-1}]t^2 = 1$, in the form

$$E^+ = [a_3 S_0 / (2A)^{1/6}] F(1/6, 5/6, 3/2, X) + b_3 S_0 [2A / (2A - t^2(A + \theta))]^{1/2} F(1/3, -1/3, 1/2, X), \quad (4.6.10)$$

with now

$$X = 1 - t^2(A + \theta) / (2A).$$

In order to avoid the complications which arise from the fact that the second term of (4.6.10) has a singularity for $A = \theta$, $t^2 = 1$, we shall therefore take $b_3 = 0$. The function E^+ will accordingly be of the form

$$E^+ = [a_3 S_0 / (2A)^{1/6}] F(1/6, 5/6, 3/2, X). \quad (4.6.11)$$

We note further that all these considerations can be repeated with A replaced by $-A$. Our operator will therefore yield two independent types of solutions, depending on whether the argument of the associate function is taken as $A + \theta$, or $A - \theta$. The exact conditions under which our operator can generate solutions of the compressibility equation in the supersonic case are given in the following theorem:

Suppose $f_s(\beta)$, $s = 1, 2$, are real functions of the real variable and everywhere differentiable with the possible exception of $\beta = 0$; suppose further that in a fixed neighborhood of $\beta = 0$, f_s can be approximated to any prescribed degree of accuracy by the expressions of the form

$$\sum_{n=1}^N A_n^{(N)} \beta^{K_n}, \quad K_n \geq 1, \quad (4.6.12)$$

then

$$\Psi(A, \theta) = R_1^+(f_1) + R_2^+(f_2), \quad (4.6.13)$$

$$R_s^+(f_s) = \int_{t=-1}^{+1} E^+(A, -(-1)^s \theta, t) f_s \left(\frac{1}{2} (A - (-1)^s \theta) (1 - t^2) \right) dt / (1 - t^2)^{1/2}, \quad (4.6.14)$$

$$s = 1, 2,$$

represents a solution of the compressibility equation, which is defined for any $A > 0$ and can be interpreted as a stream function of a (possible) supersonic flow pattern. The proof of this theorem is given in ⁹. In (4.6.14), the function E^+ is defined by (4.6.8) or (4.6.9) or (4.6.11), depending upon the value of $|X|$.

Before we proceed to investigate the behavior of our solutions on the sonic line, we note that (4.6.4a) is not the only solution which depends on one variable. The generating function (4.6.4) for the operator of the second kind may be replaced by

$$E^+(\lambda, \theta, t) = A_1 S_0 (-2\lambda)^{-1/6} F(1/6, 5/6, 1/2, X), \quad (4.6.15)$$

$$X = t^2(\lambda - \lambda_0 + i\theta) / (2\lambda).$$

Besides its greater generality, the generating function (4.6.15) (with $\lambda_0 \neq 0$) has a number of additional features, which make it superior to (4.6.4) in many cases. In (4.6.4), the point $\lambda = 0$, $\theta = 0$, is a singularity since by approaching this point in a suitable manner, the argument X of the hypergeometric function can be given an arbitrary value. In (4.6.15), such a singularity does not exist, since λ and $\lambda - \lambda_0 + i\theta$ cannot vanish simultaneously if $\lambda_0 \neq 0$. Another singularity, which can be removed by using (4.6.15) with $\lambda_0 \neq 0$, occurs in the supersonic case. For $t^2 = 1$ and $A = \theta$, the second term of the right-hand side of (4.6.10) becomes singular. In order to allow for this case, we had to assume that $b_3 = 0$, thus somewhat restricting

the generality of the solutions we could obtain. Setting $\lambda = iA$, it is seen that in the supersonic case the argument of the hypergeometric function in (4.6.15) becomes

$$X = t^2 (A + i\lambda_0 + \theta)/(2A). \quad (4.6.16)$$

For $t = \mp 1$, we have $X \neq 1$ for real values of A, θ ; the singularity in question is therefore removed and the constant b_3 in (4.6.10) may now take any arbitrary value.

Thus, by the use of integral operators of the second kind with the generating functions (4.6.4), (4.6.8), (4.6.9), as well as (4.6.15), we obtain solutions $\Psi = I m P_2^+(f)$ which are defined in the subsonic and supersonic regions respectively. Let us repeat that if f (4.6.7) is defined in a domain G_1 in the subsonic region and has, as its only singularities in G_1 , branch points of finite order (but not poles or logarithmic singularities), then the generated function is again defined in G_1 . In particular, it has branch points at the same points and of the same order as g . If g is a twice-differentiable function of one real variable in a domain G_2 in the supersonic region, the generated function will be a solution of (4.5.5). Thus, by this procedure we can generate solutions of (4.5.2) which are defined in adjacent domains, one in the subsonic, the other in the supersonic region. Our object is to show that these solutions can be continued across the sonic line. This fact is seen immediately if we introduce a new variable \bar{s}

$$\begin{aligned} \bar{s} &= (-\lambda)^{2/3}, & \text{for } \lambda < 0, \\ \bar{s} &= -A^{2/3}, & \text{for } A > 0. \end{aligned} \quad (4.6.17)$$

We note that in the simplified case we have:

$$\bar{s} = -2 \cdot 3^{-2/3} [2/(k-1)]^{(2-k)/(3k-3)} H^+. \quad (4.6.18)$$

The variable $\bar{s} = \bar{s}(M^+)$ (where M^+ denotes the fact that the simplified case is taken into account) considered as a function of Mach number M^+ , possesses the property that $\bar{s}(1) = 0$, and that

$$d\bar{s}(M^+)/dM^+ = -2^{5/3} (3k+3)^{-2/3} M^+ + 0(1-M^{+2}), \quad (4.6.19)$$

is non-vanishing and bounded (finite) in a sufficiently small neighborhood of $M^+ = 1$. In (4.6.19), the symbol $0(1-M^{+2})$ denotes the terms of order $(1-M^{+2})$. More details concerning this particular item may be found in the original paper⁹. Thus our solutions can be continued across the sonic line, since by expressing both of them (one on each side of the sonic line) in terms of the one variable \bar{s} , we may easily show that the generated function $\Psi(\theta, s)$ is an analytic function of θ and \bar{s} (and therefore of θ and M^+) at the point $\theta = 0, \bar{s} = 0$.

7. Integral operator of the second kind in the case of the "exact" compressibility equation.

As was shown in Part I, in the subsonic region, equation (4.5.5) has a solution in the form

$$\Psi = I m [P(f)], \quad (4.7.1)$$

where

$$P(f) = \int_{-1}^{+1} E(Z, \bar{Z}, t) f\left(\frac{1}{2} Z(1-t^2)\right) dt / (1-t^2)^{1/2}. \quad (4.7.2)$$

The generating function of the integral operator $P(f)$, which produces solutions of this equation, is

$$E = H(2\lambda) E^*, \quad (4.7.3)$$

and the function E^* can be represented by a series

$$E^* = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (t^2 Z)^n Q^{(n)}(2\lambda), \quad (4.7.4)$$

where the $Q^{(n)}$'s are solutions of the system:

$$(2n+1)Q_{\lambda}^{(n+1)} + Q_{\lambda\lambda}^{(n)} + 4FQ^{(n)} = 0, \quad (4.7.5)$$

$$Q^{(1)} = -4 \int_{\infty}^{\lambda} F d\lambda, \quad (4.7.5a)$$

[for relation between λ , Λ and M see (1.3.13) and (3.2.8)] the function F being given by equation (4.5.8). The above series converges for $|Z| < 2|\lambda|$, or for $\theta^2 < 3\lambda^2$ and was thoroughly discussed in Part I. It is therefore desirable to obtain solutions which are defined in $|Z| > 2|\lambda|$ or $\theta^2 > 3\lambda^2$. Similarly, in the supersonic region a solution was presented which is convergent for $-3\Lambda < \theta < \Lambda$, if only the series $V^{(1)}$ is taken into account, or for $-\Lambda < \theta < \Lambda$, if the sum of the series $V^{(1)} + V^{(2)}$ is considered (see Section III.8). It is desirable, therefore, to obtain solutions which are defined for $-3\Lambda > \theta$ and for $\theta > \Lambda$. At first, we shall discuss the subsonic region. We shall present the following theorem without the proof which the reader may find in ⁹:

Let

$$q^{(n,\kappa)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu}(n,\kappa)_{(-\lambda)}^{n-\frac{1}{2}+(2/3)(\kappa+\nu)}, \quad \kappa = 1, 2, \quad (4.7.6)$$

be a set of functions which are connected by the relations

$$q_{\lambda\lambda}^{(0,\kappa)} + 4Fq^{(0,\kappa)} = 0, \quad (4.7.7a)$$

$$2\left(n + \frac{2}{3}\kappa\right)q_{\lambda}^{(n,\kappa)} + q_{\lambda\lambda}^{(n+1,\kappa)} + 4Fq^{(n+1,\kappa)} = 0, \quad (4.7.7b)$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad \kappa = 1, 2.$$

Then each of the functions

$$E^{*(\kappa)} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n,\kappa)} / (-t^2 Z)^{n-\frac{1}{2}+(2/3)\kappa}, \quad (4.7.8)$$

multiplied by H is a generating function of the integral operator $P(f)$ and each of these series converges in $E[2|\lambda| < |Z|]$.

In order to obtain a continuation of a given stream function to the supersonic region, replace λ by the variable $\bar{s} = (-\lambda)^{2/3}$. Then the generating function in the subsonic case may be written as

$$\begin{aligned} E^{(\kappa)}(\lambda, \theta, t) &= H(2\lambda) E^{*(\kappa)}(\lambda, \theta, t) = \\ &= 2^{-1/6} S_0 p(\bar{s}) \bar{s}^{\kappa-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu}^{(n,\kappa)} \bar{s}^{(2/3)n} \bar{s}^{\nu} / (-t^2 Z)^{n-\frac{1}{2}+(2/3)\kappa}, \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

for

$$|\bar{s}| < \bar{s}_0, \quad 2|\bar{s}|^{3/2} < |Z|, \quad \kappa = 1, 2,$$

where

$$Z = (-\bar{s})^{3/2} + i\theta, \quad (4.7.9a)$$

and the domain of regularity is a circle of radius \bar{s}_0 , with the center at the origin. By replacing λ by $i\Lambda$ we see that $(-\lambda)^{2/3}$ is changed to $-\Lambda^{2/3}$. Thus we obtain as the generating function in the supersonic case,

$$E^{(\kappa)}(\Lambda, \theta, t) = 2^{-1/6} S_0 p(\bar{s}) \bar{s}^{\kappa-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} i^n C_{\nu}^{(n,\kappa)} (-\bar{s})^{(2/3)n} \bar{s}^{\nu} / (-t^2 Z)^{n-\frac{1}{2}+(2/3)\kappa}, \quad (4.7.10)$$

for

$$|\bar{s}| < s_0, \quad 2 |\bar{s}|^{3/2} < |Z|, \quad \kappa = 1, 2,$$

where

$$Z = i (-\bar{s})^{3/2} + i \theta. \quad (4.7.10a)$$

As mentioned above, the proof is given in ⁹.

Let us now restrict ourselves to a neighborhood of the point $\lambda = 0$, $\theta = \theta_0$, $\theta_0 \neq 0$, lying entirely in the domain $D = E [|\bar{s}| < \bar{s}_0, |\bar{s}| < 3^{-1/3} |\theta|^{2/3}]$. We may show that if f is regular in D , then both the generating function and the associate function, and therefore the expression $P[f(-\bar{s}^{3/2} + i\theta)]$ in the subsonic case, may be expanded in integral powers of $(\theta - \theta_0)$ and $\bar{s}^{1/2}$. Similarly, in the supersonic case, the expression $P[f(i(-\bar{s})^{3/2} + i\theta)]$ may be expanded in integral powers of $(\theta - \theta_0)$ and $(-\bar{s})^{1/2}$. One may also show that both functions P (in sub- and supersonic regions) are determined and equal to each other for $\bar{s} = 0$. In the next step, we may show that if f is regular in D , then the solution $P[f(-\bar{s}^{3/2} + i\theta)]$ is an analytic function of \bar{s} and $(\theta - \theta_0)$ at $(0, \theta_0)$. Thus

$$P[f(-\bar{s}^{3/2} + i\theta)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta - \theta_0) \bar{s}^n. \quad (4.7.11)$$

Since \bar{s} is unchanged by the result of putting $i\lambda$ for λ , we obtain

$$P[f(i(-\bar{s})^{3/2} + i\theta)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta - \theta_0) \bar{s}^n. \quad (4.7.12)$$

The expressions $P[f(-\bar{s}^{3/2} + i\theta)]$ and $P[f(i(-\bar{s})^{3/2} + i\theta)]$, equal functions of \bar{s} and $(\theta - \theta_0)$, are analytic continuations of each other across the sonic line. Thus, assuming that the associate function is regular in a sufficiently large domain, and applying the integral operator of the second kind, we obtain solutions of a compressibility equation defined in four adjacent domains, namely

$$D_1 = E[M < 1, \quad \theta > 3^{1/2} |\lambda(M)|] + E[M > 1, \quad \theta > \lambda(M)],$$

$$D_2 = E[M < 1, \quad \theta < 3^{1/2} |\lambda(M)|],$$

$$D_3 = E[M < 1, \quad \theta < -3^{1/2} |\lambda(M)|] + E[M > 1, \quad \theta < -\lambda(M)],$$

$$D_4 = E[M > 1, \quad -\lambda(M) < \theta < \lambda(M)].$$

The solutions defined in D_1 and D_3 were presented in the present section, while those defined in D_2 and D_4 were derived in Parts I and III, respectively.

In the simplified case, using the theory of hypergeometric equations, it was possible to combine these representations into one, which yields solutions of (4.5.2) defined in the whole $(M, -\theta)$ -plane. In the exact compressibility equation, the problem remains of combining these four representations into one. This problem can be attacked by using the integral operator of the first kind in addition to that of the second kind, and, in analogy to the simplified case, developing a theory of differential equations with singular coefficients, which would furnish us with information corresponding to that used in the simplified case. More information concerning this item may be found in ⁹.

We should like to add here a remark regarding the general question of analytic continuation of a solution $\Psi(Z, \bar{Z})$ of a linear partial differential equation. If Ψ is given in two different domains, say B_1 and B_2 , by different representations, say in B_1 by the integral operator of the first kind in the form

$$\Psi = \Psi_2 \equiv p[g(Z)] + \bar{p}[h(\bar{Z})], \quad (4.7.13)$$

[see (4.5.20)], and in B_2 by another operator

$$\Psi = \Psi_2 \equiv \int_{t=-1}^{+1} E(Z, \bar{Z}, t) f\left(\frac{1}{2} Z(1-t^2)\right) dt/(1-t^2)^{1/2}, \quad (4.7.14)$$

[see (4.5.16)], (not necessarily of the first kind), and the origin lies in the intersection of both domains B_1 and B_2 , which may be denoted mathematically by a symbol $B_1 \cap B_2$, then the problem of the analytic continuation of Ψ_2 into the domain B_1 is equivalent to the determination of g and h from a given $f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n Z^n$.

One may show¹² that setting $Z = 0$, and $\bar{Z} = 0$, respectively, in the relation

$$p[g(Z)] + \bar{p}[h(\bar{Z})] = \int_{t=-1}^{+1} E(Z, \bar{Z}, t) f\left(\frac{1}{2} Z(1-t^2)\right) dt/(1-t^2)^{1/2}, \quad (4.7.15)$$

we obtain the identities

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z^n \sum_{\nu=0}^n \tau_{n\nu}^{(1)} \alpha_{\nu} = g(Z) + \bar{R}(0, Z) h(0), \quad (4.7.16)$$

$$\alpha_{00} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Z}^n \tau_{nn}^{(2)} = R(0, \bar{Z}) g(0) + h(\bar{Z}), \quad (4.7.17)$$

where

$$\tau_{n\nu}^{(1)} = \int_{t=-1}^1 E_{n-\nu}^{(1)} (1-t^2)^{\nu-1/2} 2^{-\nu} dt, \quad (4.7.18)$$

$$\tau_{nn}^{(2)} = \int_{t=-1}^1 E_n^{(2)}(t) (1-t^2)^{-1/2} dt, \quad (4.7.19)$$

$$E(Z, 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(1)}(t) Z^n, \quad (4.7.20)$$

$$E(0, \bar{Z}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(2)}(t) \bar{Z}^n. \quad (4.7.21)$$

It is thus seen that the analytic continuation of Ψ_2 into B_1 and all the problems arising from it, such as the determination of the singularities, etc., are reduced to similar problems in the theory of functions of one complex variable which are given by their power series expansions.

One more item may be mentioned briefly, and this is the determination of the associate function in terms of the given stream function. There are possible cases in which the stream function is given in the form of a power series, say, and we want to have the associate function. In many instances, the stream function Ψ is given in some different form, say the values of Ψ and $\partial\Psi/\partial M$ are given on a line $M = \text{const.}$ If these quantities are analytic functions of θ , then from these data it is possible to determine the associate functions. Problems of this type are sometimes of importance. In⁹ one may find the procedure for the derivation of the formula expressing f in terms of the values $\Psi = \chi_1(\theta)$ and $\partial\Psi/\partial M = \chi_2(\theta)$ on the sonic line, $M = 1$.

8. Combination of the integral operator and Chaplygin's solution.

We now want to indicate another procedure which aims at constructing "mixed" flows. In applying this method, we use in addition to the integral operator,

¹² S. Bergman: Certain classes of analytic functions of two real variables and their properties. Trans. Amer. Math. Soc. 57, Vol. 299—331 (1945).

Chaplygin's solutions. Suppose that $g(Z^4)$ is a complex potential which in the (incompressible) physical plane yields a flow past a closed curve. For the sake of simplicity, let us assume that the flow is symmetric, and the complex potential (in the logarithmic plane) is a two-valued function, possessing as its only singularity a branch point of the second order at the point λ_∞ corresponding to the flow at infinity (see the section on singularities for more details on this subject). Employing the operator of the first kind, we obtain a solution of equation $\Psi^{(1)} = I m [p(g)]$ in the subsonic region. For the illustrative purposes, let us assume that this solution will not be determined at first in its entire domain of definition, but only in a portion, say D , of this domain, namely in the portion situated in $[\lambda \leq \lambda_0]$, $\lambda_0 < 0$, say, so that, in general, the boundary curve $\Psi^{(1)} = 0$ is not closed in D . Let us assume that $\lambda_\infty < \lambda_0$ holds. We shall now describe a procedure to determine the analytic continuation of the solution $\Psi^{(1)}$ outside of D . Since in the following we have also to operate in the supersonic region, and as we shall employ Chaplygin's solutions, it is convenient to introduce, instead of λ , the variable $\tau = (k-1)q^2/(2a_0^2)$, where a_0 is the speed of sound at a stagnation point. Let $\tau_\infty = \tau(\lambda_\infty)$, and let us introduce Chaplygin's solution:

$$(A_\nu F_\nu + B_\nu F_\nu^*) \tau^{\nu/(2L)} \exp [i(\pi \nu \theta)/L], \quad (4.8.1)$$

where

$$F_\nu = F(\alpha_\nu, \beta_\nu, -\beta, 1-\tau), \quad (4.8.2)$$

$$F_\nu^* = (1-\tau)^{\beta+1} F(\gamma_\nu - \alpha_\nu, \gamma_\nu - \beta_\nu, 2+\beta, 1-\tau), \quad (4.8.3)$$

F being the hypergeometric series. Here

$$\gamma_\nu = \left(\frac{\nu}{L} + 1\right), \quad \beta = (k-1)^{-1}, \quad \alpha_\nu = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\nu}{L} - \beta\right) + \Delta_\nu \right], \quad (4.8.4a)$$

$$\beta_\nu = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\nu}{L} - \beta\right) - \Delta_\nu \right], \quad \Delta_\nu = \left[\left(\frac{\nu}{2L}\right)^2 (2\beta + 1) + \frac{1}{4} \beta^2 \right]^{1/2}. \quad (4.8.4b)$$

We assumed, above, that we know the solution $\Psi^{(1)}(\tau, \theta) = \Psi^{(1)}(\lambda(\tau), \theta)$ in D . In order to compute the continuation $\Psi^{(2)}$ of $\Psi^{(1)}$, obtained in D by the use of the integral operator, into the domain B_1 , say, we write $\Psi^{(2)}$ in the form:

$$\Psi^{(2)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[(A_\nu^{(1)} F_\nu + B_\nu^{(1)} F_\nu^*) \tau^{\nu/(2L)} \cos \left(\frac{\pi \nu \theta}{L} \right) + (A_\nu^{(2)} F_\nu + B_\nu^{(2)} F_\nu^*) \tau^{\nu/(2L)} \sin \left(\frac{\pi \nu \theta}{L} \right) \right], \quad (4.8.5)$$

and determine the coefficients $A_\nu^{(\kappa)}, B_\nu^{(\kappa)}$, $\kappa = 1, 2$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$, so that on $\tau = \tau_0$, $-L \leq \theta \leq L$ (where $\mp L$ denote the lower and upper bounds of θ),

$$\Psi^{(1)}(\tau_0, \theta) = \Psi^{(2)}(\tau_0, \theta), \quad (4.8.6)$$

$$\Psi_\tau^{(1)}(\tau_0, \theta) = \Psi_\tau^{(2)}(\tau_0, \theta), \quad (4.8.7)$$

holds. It can be shown that the series (4.8.5) converges in a certain strip, say $[\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1, -L_1 \leq \theta \leq L_1]$. By replacing τ_0 by τ_1 , L by L_1 , and repeating the same procedure, we may continue the function to a range of values $[\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2, -L_2 \leq \theta \leq L_2]$, and so on. If we employ the integral operator of the first kind, under the assumption that the function g in the expression $\Psi^{(1)} = I m [p(g)]$ is regular in a sufficiently large domain, we can prove the existence of Ψ in the whole subsonic region, as well as the fact that by this procedure the function Ψ can be determined in the subsonic portion of the domain of definition of the flow. If the flow can be continued to the supersonic region, then the procedure described also yields the continuation to that region. If, on the other hand, we replace the infinite series (4.8.5) by a finite one (in doing this, we may require that

$$|\Psi^{(1)}(\tau_0, \theta) - \Psi^{(2)}(\tau_0, \theta)| \leq \varepsilon, \quad (4.8.8a)$$

$$|\Psi_\tau^{(1)}(\tau_0, \theta) - \Psi_\tau^{(2)}(\tau_0, \theta)| \leq \varepsilon, \quad (4.8.8b)$$

where ε is any preassigned quantity, however small), then the finite sum is defined everywhere, and if $\Psi = 0$ is a closed curve, we obtain in this way a "mixed" solution of the exact equation, which together with its normal derivative has a jump (of the value $\leq \varepsilon$) on the line $\tau = \tau_0$. This jump, however, can be made arbitrarily small.

9. Tables for the determination of transonic flow patterns.

Alternative formulas.

The preparation of tables for the determination of transonic flow patterns needs some explanation, which will be given below. For a better understanding, let us begin with an incompressible fluid. A plane is introduced whose Cartesian coordinates are the variables θ and

$$\tilde{\eta} = \int_1^q \tilde{\varrho}_0 q^{-1} dq = \log q, \quad (4.9.1)$$

with $\tilde{\varrho}_0 = 1$ for an incompressible fluid. The complex potential for a large class of symmetric obstacles in these variables can be written in the form

$$g(\tilde{z}) = \sum_{v=0}^{\infty} \tilde{b}_v (\tilde{z} - \eta_0)^{v-1/2}, \quad (4.9.2)$$

with $\tilde{z} = \tilde{\eta} + i\theta$ and η_0 equal to the logarithm of the speed at infinity. In the case of symmetric obstacles, the \tilde{b}_v 's are purely imaginary. The representation (4.9.2) holds only in a circle with origin at $\tilde{\eta} = \eta_0$ and of radius equal to the distance from $\tilde{\eta} = \eta_0$ to the nearest singularity. However, by employing suitable summation methods, e. g.,

$$g(\tilde{z}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum [\tilde{b}_v / \Gamma(1 + s_v)] [\tilde{z} - \eta_0]^{v-1/2}, \quad (4.9.3)$$

where the symbol Γ denotes the Gamma function, a representation is obtained for $g(\tilde{z})$ in a much larger domain (for details, see reference 86). With the constants b_v purely imaginary, the stream function $\tilde{\Psi}$ can be written

$$\tilde{\Psi} = \text{Im} [g(\tilde{z})] = \sum_{v=0}^{\infty} i \tilde{b}_v \tilde{\Psi}^{(v)}(\tilde{\eta}, \theta; \eta_0), \quad (4.9.4)$$

$$\tilde{\Psi}^{(v)}(\tilde{\eta}, \theta; \eta_0) = \text{Re} [\tilde{z} - \eta_0]^{v-1/2}. \quad (4.9.4a)$$

The streamlines of the flow patterns corresponding to $g(\tilde{z})$ in the physical plane are given by

$$x = \sum_{v=0}^{\infty} i \tilde{b}_v \tilde{X}^{(v)}(\tilde{\eta}, \theta; \eta_0), \quad (4.9.5a)$$

$$y = \sum_{v=0}^{\infty} i \tilde{b}_v \tilde{Y}^{(v)}(\tilde{\eta}, \theta; \eta_0), \quad (4.9.5b)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{(v)}(\eta, \theta; \eta_0) = & \int \tilde{\varrho}_0^{-1} e^{\eta_0} \{ [-\tilde{\Psi}_\theta^{(v)} \cos \theta - \\ & - \tilde{\Psi}_\eta^{(v)} \sin \theta] d\tilde{\eta} + [\tilde{\Psi}_\eta^{(v)} \cos \theta - \tilde{\Psi}_\theta^{(v)} \sin \theta] d\theta \}, \end{aligned} \quad (4.9.6a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^{(v)}(\tilde{\eta}, \theta; \eta_0) = & \int \tilde{\varrho}_0^{-1} e^{\eta_0} \{ [-\tilde{\Psi}_\theta^{(v)} \sin \theta + \\ & + \tilde{\Psi}_\eta^{(v)} \cos \theta] d\tilde{\eta} + [\tilde{\Psi}_\eta^{(v)} \sin \theta + \tilde{\Psi}_\theta^{(v)} \cos \theta] d\theta \}. \end{aligned} \quad (4.9.6b)$$

The coefficients b_v depend on the boundary curve of the profile. In employing the hodograph method in the incompressible fluid case, it is convenient to prepare a set of tables for

$$\tilde{\Psi}^{(v)}(\tilde{\eta}, \theta; \eta_0), \quad \tilde{X}^{(v)}(\tilde{\eta}, \theta; \eta_0), \quad \tilde{Y}^{(v)}(\tilde{\eta}, \theta; \eta_0), \quad (4.9.7)$$

for a number of values of the parameter η_0 . For, by using a set of b_v 's appropriate to the given obstacle, $\tilde{\Psi}(\tilde{\eta}, \theta; \eta_0)$ could immediately be determined by making use of equations (4.9.4) and (4.9.7). To find the image of a streamline,

$$\tilde{\Psi}(\tilde{\eta}, \theta; \eta_0) = s = \text{const.}, \quad (4.9.8)$$

in the physical plane, a sufficiently dense set of points $(\tilde{\eta}_s, \theta_s) = 1, 2, \dots$, is first found, corresponding to the streamline $\tilde{\Psi}(\tilde{\eta}, \theta; \eta_0) = s$. From the tables, the values are read for

$$\tilde{X}^{(v)} = \tilde{X}^{(v)}(\tilde{\eta}_s, \theta_s; \eta_0), \quad \tilde{Y}^{(v)} = \tilde{Y}^{(v)}(\tilde{\eta}_s, \theta_s; \eta_0), \quad (4.9.9)$$

and by using (4.9.5), the image $\tilde{\Psi}(x, y) = s$ of $\tilde{\Psi}(\tilde{\eta}, \theta; \eta_0) = s$ is found in the physical plane.

The essence of this method is (as explained in previous sections) the separation of the quantities $\tilde{X}^{(v)}$, $\tilde{Y}^{(v)}$, $\tilde{\Psi}^{(v)}$, that are independent of the profile from the b_v 's which depend on it. For the former, a set of tables can be prepared once and for all. The problem of determining the latter recurs with each profile. This usually is a relatively simple matter, in the case of incompressible flow. In the compressible case, the problem is much more involved, but in most cases of interest, the b_v 's found for the incompressible case may be used in the compressible case as a first approximation to the exact b_v 's. Since the published tables were calculated for solutions having forms a little different from those cited above, we shall present these alternative formulas. The equation corresponding to (4.5.11) now has the form

$$\Psi_{\eta\eta} + C \eta \Psi_{\theta\theta} = 0, \quad C = -2 [2/(k+1)]^{(2-k)/(k-1)}, \quad (4.9.10)$$

with $\eta \equiv H$, and the complex solutions of (4.9.10) are given in the form:

$$P^*[f(z)] = \int_{-1}^{+1} E^*(\eta, \theta; \eta_0) f[(z/2)(1-t^2)] [dt/(1-t^2)^{1/2}], \quad (4.9.11a)$$

or

$$p^*[g(z)] = S_0 (-\eta)^{-1/4} \{g(z) + \sum (1/2^{2n}) [\Gamma(2n+1)/\Gamma(n+1)] P^{(n)}(z) g^{(n)}(z)\}, \quad (4.9.11b)$$

where $z = \eta + i\theta$, and $g(z)$ is an analytic function of z . The function E^* may be taken in the form

$$E^*(\eta, \theta; \eta_0) = S_0 (-\eta)^{-1/4} \bar{F}\{1/6, 5/6, 1/2, X\}, \quad (4.9.12)$$

where $\bar{F}(\alpha, \beta, \gamma, X)$ is the hypergeometric function and the other symbols used are

$$X = t^2 [c(-\eta)^{3/2} + i\theta - \eta_0]/2c(-\eta)^{3/2}, \quad (4.9.13)$$

$$c = (2^{3/2}/3) [(k-1)/2]^{(k-2)/[2(k-1)]}. \quad (4.9.13a)$$

The quantity S_0 is given by (4.6.3a), and the polynomials $P^{(n)}(z)$ are defined by the recursion formula and initial conditions:

$$P_z^{(1)} + 2F^* = 0, \quad (2n+1)P_z^{(n+1)} + 2P_{zz}^{(n)} + 2F^*P^{(n)} = 0, \quad (4.9.14)$$

$$P^{(n)}(0) = 0, \quad (4.9.14a)$$

with

$$F^* = (5/36)(1/4c^2)(-\eta)^{-3}. \quad (4.9.15)$$

The functions $g^{(n)}(z)$ may be written as

$$g^{(n)}(z) = \int_0^z \int_0^{z_1} \dots \int_0^{z_{n-1}} g(z_n) dz = [(-1)^n / (n-1)!] \int_{t=0}^{t=z} (z-t)^{n-1} g(t) dt. \quad (4.9.16)$$

The stream function is defined as the imaginary part, i. e., $\Psi = \text{Im} [p^*(g)]$. A form similar to that one in (4.9.4) may be given, namely

$$p^*[g(z)] = \sum_{v=0}^{\infty} b_v p^*\{(z - \eta_0)^{v+1/2}\}, \quad (4.9.17)$$

where

$$p^*\{(z - \eta_0)^{v+1/2}\} = B^{(v)}[p^*(z), \overline{p^*(z)}; \eta_0] [p^*(z) - \eta_0]^{v+1/2}, \quad (4.9.18)$$

$$p^*(z) = p^*(\eta + i\theta) = -c(-\eta)^{3/2} + i\theta = \xi, \quad (4.9.18a)$$

$$B^{(v)}[p^*(z), \overline{p^*(z)}; \eta_0] = B^{(v)}[\xi, \bar{\xi}; \eta_0] = S_0(-\eta)^{-1/4} F[1/6, 5/6, v+1/2, X], \quad (4.9.18b)$$

$$X = (\xi - \eta_0) / [(-2c)(-\eta)^{3/2}]. \quad (4.9.18c)$$

It is seen, then, that in the case of the stream function, the transition from the incompressible to the compressible case is made by multiplying each term of its power series expansion by a "compressibility factor" $B^{(v)}(\xi, \bar{\xi}; \eta_0)$ and by replacing the variable $z = \eta + i\theta$ by the variable $\xi = -c(-\eta)^{3/2} + i\theta$. This latter change implies a distortion in the η direction mentioned above. Corresponding to expression (4.9.4) for the incompressible case, the stream function for a symmetric profile can be written in the form

$$\Psi(\eta, \theta; \eta_0) = \sum i b_v \Psi^{(v)}(\eta, \theta; \eta_0), \quad (4.9.19)$$

where

$$\Psi^{(v)} = \text{Re} [B^{(v)}(\xi, \bar{\xi}; \eta_0) (\xi - \eta_0)^{v+1/2}]. \quad (4.9.20)$$

The implicit representation of the streamline $\Psi(\eta, \theta; \eta_0) = s$ in the physical plane is given by

$$x = \sum i b_v X^{(v)}(\eta_s, \theta_s; \eta_0), \quad y = \sum i b_v Y^{(v)}(\eta_s, \theta_s; \eta_0), \quad (4.9.21)$$

with

$$X^{(v)} = \int A_1 [(-B_1 \Psi_{\theta}^{(v)} \cos \theta - \Psi_{\eta}^{(v)} \sin \theta) d\eta + (C_1 \Psi_{\eta}^{(v)} \cos \theta - \Psi_{\theta}^{(v)} \sin \theta) d\theta], \quad (4.9.22)$$

$$Y^{(v)} = \int A_1 [(-B_1 \Psi_{\theta}^{(v)} \sin \theta - \Psi_{\eta}^{(v)} \cos \theta) d\eta + (C_1 \Psi_{\eta}^{(v)} \sin \theta + \Psi_{\theta}^{(v)} \cos \theta) d\theta], \quad (4.9.23)$$

$$A_1 = [l \exp \left(\int \sqrt{-l^*(\eta)} d\eta \right)]^{-1}, \quad (4.9.24a)$$

$$B_1 = (1 - M^2)^{1/2} [-l^*(\eta)]^{1/2}, \quad (4.9.24b)$$

$$C_1 = (1 - M^2)^{1/2} [\sqrt{-l^*(\eta)}]^{-1}, \quad (4.9.24c)$$

$$l^*(\eta) = C \eta. \quad (4.9.24d)$$

In order to evaluate the "compressibility factors" $B^{(v)}(\eta, \theta; \eta_0)$, suitable power series representations must be found for the hypergeometric function appearing in (4.9.18b). It is well known that for $|X| < 1$, $F(\alpha, \beta, \gamma, X)$ may be represented by a hypergeometric series $F(\alpha, \beta, \gamma, X)$ and for $|X| > 1$ a combination of two hypergeometric series with arguments and parameters different from those appearing in the hypergeometric function may be used. In the case of the hypergeometric function appearing in (4.9.18b), the boundary separating the domains of convergence is

$$|[-c(-\eta)^{3/2} - \eta_0 + i\theta] / [-2c(-\eta)^{3/2}]| = 1. \quad (4.9.25)$$

Condition (4.9.25) may be presented in the form:

$$3 c^2 \eta^3 + \theta^2 + 2 c (-\eta)^{3/2} \eta_0 + \eta_0^2 = 0, \quad \text{for } \eta < 0, \quad (4.9.26a)$$

$$3 c^2 \eta^3 - \theta^2 - 2 c (-\eta)^{3/2} \eta_0 - \eta_0^2 = 0, \quad \text{for } \eta > 0. \quad (4.9.26b)$$

In these domains, the following representations are used respectively:

$$\bar{F}(1/6, 5/6, \nu + 1/2, X) = F(1/6, 5/6, \nu + 1/2, X), \quad (4.9.27)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}(1/6, 5/6, \nu + 1/2, X) = & A_\nu (1/X)^{1/6} F(1/6, 2/3 - \nu, 1/3, 1/X) + \\ & + B_\nu (1/X)^{5/6} F(5/6, 4/3 - \nu, 5/3, 1/X), \end{aligned} \quad (4.9.28)$$

where the quantity X is given by (4.9.18c). The A_ν 's and B_ν 's denote the quantities:

$$A_\nu = \Gamma(-2/3) \Gamma(\nu + 1/2) / [\Gamma(-1/3 - \nu) \Gamma(5/6)], \quad (4.9.29a)$$

$$B_\nu = \Gamma(\nu + 1/2) \Gamma(2/3) / [\Gamma(1/3 - \nu) \Gamma(1/6)]. \quad (4.9.29b)$$

It has been shown above how it is possible to extend the methods used in the case of an incompressible fluid to the case of a compressible one. The analogues of equations (4.9.2), (4.9.4), (4.9.5), and (4.9.6) of the incompressible flow were obtained, namely equations (4.9.17), (4.9.19), (4.9.21), (4.9.22) and (4.9.23). These permit the setting up of tables for a compressible fluid of the type that was outlined for an incompressible fluid.

In the literature¹³ one may find two types of tables. Type I depends upon a parameter η_0 and has to be prepared for a number of values of η_0 , say $\eta_{0,\nu}$ ($\nu = 1, \dots, n$). In this case, one must resort to interpolation methods in order to obtain streamlines for intermediary values of η_0 : $\eta_{0,\nu} < \eta_0 < \eta_{0,\nu+1}$. A table of $\Psi^{(\nu)}(\eta, \theta; \eta_0)$ (4.9.20) for a specific value of η_0 ($\eta_0 = -0.02$) is given in¹³. In the same paper, a table is also included for

$$\varphi^{(\nu)}(\eta, \theta; -0.02) = I m \{p^* [(z - 0.02)^{\nu-1/2}]\}, \quad (4.9.30)$$

in view of possible later applications, as well as a conversion table from the variable η to the local Mach number M .

The second type of tables which may be calculated are the tables containing the values of $\bar{F}(1/6, 5/6, \nu + 1/2, \alpha + i\beta)$. These values may be computed once and for all, as well as derivatives of \bar{F} with respect to the argument for a number of values of α and β , where

$$\alpha = 1/2 - \eta_0 / [-2c(-\eta)^{3/2}], \quad \beta = \theta / [-2c(-\eta)^{3/2}]. \quad (4.9.31)$$

By the use of tables of fractional powers and trigonometric functions, and the tables outlined above, the computation can now be made of (4.9.20), namely:

$$\Psi^{(\nu)} = Re \{S_0 (-\eta)^{-1/2} [-c(-\eta)^{3/2} - \eta_0 + i\theta]^{\nu-1/2} \cdot \bar{F}, \quad (4.9.32)$$

$$\bar{F} = \bar{F}(1/6, 5/6, \nu + 1/2, \alpha + i\beta). \quad (4.9.32a)$$

Similarly, the derivatives $\Psi_\eta^{(\nu)}(\eta, \theta; \eta_0)$ and $\Psi_\theta^{(\nu)}(\eta, \theta; \eta_0)$ can be calculated. The stream functions in the hodograph plane are obtained by forming $\Psi(\eta, \theta; \eta_0) = \sum i b_\nu \Psi^{(\nu)}(\eta, \theta; \eta_0)$. The integrands of equations (4.9.22) and (4.9.23) may be evaluated now by using the tables for the derivatives of \bar{F} . Since the integrands of (4.9.22) and (4.9.23) are perfect differentials, the value of the integral is independent of the path and it may conveniently be taken along a streamline. The transition to the physical plane is carried out by numerical integration of (4.9.22) and (4.9.23).

In ¹³ one may find the application of the tables, mentioned above, to the calculation of the flow around an oval-shaped obstacle in the compressible flow domain corresponding to the flow around an ellipse in the incompressible flow domain. The example shows clearly the entire procedure.

¹³ S. Bergman: On tables for the determination of transonic flow patterns. Hans Reissner Anniversary Volume: Contributions to Applied Mechanics. J. W. Edwards. 1949.

(Received September 25, 1953.)

Buchbesprechung.

Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung. Von *P. Funk*, *H. Sagan* und *F. Selig*. Mit 18 Textabb., VII, 106 S. Wien: F. Deuticke, 1953. S 50.—.

Die Laplace-Transformation erfreut sich bei den Technikern und Physikern großer Beliebtheit, liefert sie doch eine strenge Begründung für den Heaviside- oder symbolischen Kalkül. Diese Wertschätzung der Laplace-Transformation geht aber oft nicht mit einem wirklichen Verständnis der Theorie Hand in Hand, erfordert sie doch etwas weitergehende mathematische Kenntnisse, welche nicht allgemein geläufig sind bzw. nach dem Abgang von der Hochschule nicht mehr geläufig sind. Man kann auf diese Sachlage den Ausspruch eines Spaniers in bezug auf die deutsche Sprache anwenden: Es geht mir mit dieser Sprache wie mit meiner Frau. Ich kenne sie, ich liebe sie, aber ich beherrsche sie nicht. Die Literatur über die Laplace-Transformation ist sehr umfangreich. Es gibt darunter ausgezeichnete Werke, z. B. die bekannten Bücher von G. Doetsch, aber sie sind den Technikern oft zu umfangreich und zuviel mit Deltasparren versehen. Andere Bücher sind wieder zu kursorisch und rezeptartig. Die Verfasser unternehmen nun die gewiß nicht leichte Aufgabe, eine Einführung zu geben, welche die rechte Mitte hält. Das Buch geht auf Vorlesungen zurück, die der erste Verfasser verschiedentlich über diesen Gegenstand gehalten hat und die sich vor allem an Techniker wandten. Die mathematischen Entwicklungen werden nur so weit gegeben, daß der Gedankengang ersichtlich ist. Für alle Details wird auf die systematischen Lehrbücher verwiesen. Zur Erläuterung werden ausgewählte Beispiele von nichttrivialem Charakter gebracht, welche dem Referenten als das Wichtigste an diesem Werk erscheinen. Es sollen nun einige dieser Beispiele angeführt werden: Transformator, Abelsche Integralgleichung und ihre Anwendung auf die Bestimmung der Dichte der Erde aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Erdbebens nach G. Herglotz und E. Wiechert, Wärmeleitungsgleichung (Bremsung eines Rades), Thomson-Kabel. Der letzte Paragraph beschäftigt sich mit der wichtigen Theorie der Regelvorgänge. Er erscheint mir gerade an den entscheidenden Stellen zu kursorisch und erfordert wohl für eine zweite Auflage eine Umarbeitung.

Der erste Verfasser hat dem Buch noch ein Nachwort hinzugefügt, welches eine schöne Übersicht über die historische Entwicklung gibt und sich mit der Persönlichkeit und dem Werk von Heaviside liebevoll und kritisch auseinandersetzt. Hervorgehoben seien noch die (knappen und vielleicht nur von den Kennern ganz zu würdigenden) Bemerkungen, welche die Theorie in die allgemeine Theorie der Funktionale einordnen und ihr so erst die richtige Beleuchtung geben. Die Verfasser haben aus Gründen, welche sie im Vorwort darlegen, keine Korrespondenztabelle in ihrem Werk aufgenommen. Trotzdem glaubt der Referent, daß man bei einer zweiten Auflage dem Buch eine Tabelle dieser Art, welche wenigstens die Korrespondenzen, die in dem Buch behandelt werden, umfaßt und eine Formelsammlung hinzufügen sollte. Dies würde den Wert des Buches vergrößern.

Der Verlag hat das Buch in guter Ausstattung herausgebracht.

E. Hlawka, Wien.

Autorenverzeichnis.

- Basch, A., Zur Geometrie der ebenen Strömung von Gasen. S. 139.
- , Richard von Mises zum 70. Geburtstag. (Persönliches.) S. 73.
- , Der Kreisel. Von R. Grammel. Zweite Auflage. I. Band. (Buchbesprechung.) S. 154.
- , Berechnung mechanischer Schwingungen. Von Fritz Söchting. (Buchbesprechung.) S. 157.
- , Classical Mechanics. Von H. Goldstein. (Buchbesprechung.) S. 160.
- Bereis, R., Über die symmetrische Rollung. S. 243.
- , Der Zykloidenraster. S. 328.
- Berger, E. R., Ein Minimalprinzip zur Auflösung der Plattengleichung. S. 39.
- Bruniak, R., Zur Struktur des Verdichtungsstoßes. S. 128.
- , Ebene Plattengitter bei Überschallgeschwindigkeit. Von R. M. El Badrawy. (Buchbesprechung.) S. 70.
- , Alfons Leon Gedenkschrift. (Buchbesprechung.) S. 153.
- , Gasdynamik. Von K. Oswatitsch. (Buchbesprechung.) S. 155.
- , Geophysik. Von M. Toperczer. (Buchbesprechung.) S. 159.
- , The Secondary Flow in Curved Pipes. Von R. W. Detra. (Buchbesprechung.) S. 270.
- Czitary, E., Vorlesungen über höhere Mathematik. Von A. Duschek. 3. Band. (Buchbesprechung.) S. 271.
- Desoyer, K. und A. Slibar, Die rechnerische Ermittlung des Ungleichförmigkeitsgrades bei Kolbenmaschinen. S. 100.
- Egger, H., Querschwingungen von Trägern mit Feder und Zusatzmasse. S. 188.
- Federhofer, K., Die Frequenzgleichung der Biegungsschwingungen des dreifach gestützten Trägers mit einer Punktmasse und gleichförmiger Auflast. S. 26.
- Fieber, H., Über die Temperaturverteilung in einem von stationärem Strom durchflossenen Draht. S. 161.
- Glaser, W., Über die Bewegung eines „Wellenpakets“ in einer Elektronenlinse. S. 144.
- , Rechenmethoden der Quantentheorie. Von S. Flüge unter Mitarbeit von H. Marschall. I. Teil. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 72.
- Gröbner, W. und P. Lesky, Eigenschwingungen eines Kreisringes mit rechteckigem Querschnitt. S. 254.
- Heinrich, G., Die Bedeutung des Schwingungsmittelpunktes für gewisse Verallgemeinerungen der Pendelbewegung. S. 117.
- Hlawka, E., Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung. Von P. Funk, H. Sagan und H. Selig. (Buchbesprechung.) S. 370.
- Holecek, K., Ein Beitrag zum Maschinenrechnen: Die Berechnung vielstelliger Quotienten nach dem Aufbauverfahren. S. 331.
- Jaburek, F., Die Festigkeit von radial beschauelten Laufrädern. S. 214.
- Jung, H., Der rotationssymmetrische elastisch-plastische Körper. S. 168.
- , Berechnung des Niederhalterdrucks beim Tiefziehen. S. 273.
- Kämmerer, C., Aufgaben aus der technischen Thermodynamik. Von H. Richter. (Buchbesprechung.) S. 271.
- Kirste, L., Elastische Verformung einer dünnen Platte nach einer abwickelbaren Fläche. S. 134.
- Kracmar, F., Elements of Wave Mechanics. Von N. F. Mott. (Buchbesprechung.) S. 72.
- Krettner, J., Elastostatische Grundformeln für allgemeine krummlinige Koordinaten. S. 11.
- , Anwendung der Tensorrechnung auf die Theorie der Rotationsschalen. S. 246.
- Krzywoblocki, M. Z. E., Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow. S. 336.
- Lesky, P., s. Gröbner, W.
- , Über eine besondere Klasse von zweiten Randwertaufgaben. S. 231.
- Magyar, F., Über hydrodynamische Kennzahlen. S. 125.
- , Physikalisches Wörterbuch. Herausgegeben von W. H. Westphal. (Buchbesprechung.) S. 159.
- Melan, E., Prof. Dr. Ing. A. L. Nadai zum 70. Geburtstag. (Persönliches.) S. 1.
- Melan, H., Die Gasturbine. Von J. Kruschik. (Buchbesprechung.) S. 154.
- Müller, F. K., Einzelprüfung von Kupfertafeln auf ihre Eignung zur Herstellung von Fugenblechen. S. 21.

- Müller, W., Die Energiegleichungen für die Wärmeübertragung bei der kompressiblen Flüssigkeits- und Gasströmung mit Reibung. S. 77.
- Müller-Magyari, F., Endliche Deformationen dünner Plattenstreifen mit freien Längsrändern. S. 319.
- , Forces in Framed Structures. Von T. L. Morgan. (Buchbesprechung.) S. 155.
- Peter, K., Seilschwebbahnen. Von E. Czi-tary. (Buchbesprechung.) S. 71.
- Regler, F., Grundlagen der Elektronenoptik. Von W. Glaser. (Buchbesprechung.) S. 153.
- , Die industrielle Anwendung radioaktiver Isotopen. Von H. Hardung-Hardung. (Buchbesprechung.) S. 157.
- Sagan, H., Inhalt und Maß. Von K. Mayrhofer. (Buchbesprechung.) S. 271.
- Schaden, K., Die Biegefestigkeit von Balken auf zwei Stützen aus bildsamen, spröden und Verbundwerkstoffen. S. 284.
- Schmetterer, L., Bemerkungen zum Verfahren der stochastischen Iteration. S. 111.
- de Schwarz, M. J., Über das Verhalten der Torsionsfunktion in der Nähe von einspringenden Ecken massiver und hohler Stäbe. S. 88.
- Sequenz, H., Die asynchronen Drehstrom- und Einphasen-Motoren. Von E. Rummel. (Buchbesprechung.) S. 156.
- Sequenz, H., Atomphysik in gemeinverständlicher Darstellung. Von H. Thirring. (Buchbesprechung.) S. 158.
- Skudrzyk, E., Meßtechnik für Funkingenieure. Von F. Benz. (Buchbesprechung.) S. 71.
- Slibar, A., s. Desoyer, K.
- und K. Desoyer, Zur Schwingungstilgung bei Sternmotoren. S. 309.
- Smekal, A. G., Zum Bruchvorgang bei sprödem Stoffverhalten unter ein- und mehrachsigen Beanspruchungen. S. 49.
- Starnberg, W., Verdrehung bildsamer Metallstäbe über die Fließgrenze. S. 299.
- Stix, R., Die Wicklungen elektrischer Maschinen. Von H. Sequenz. 2. Band. (Buchbesprechung.) S. 272.
- Strasser, A., Zur Beulung versteifter Platten. S. 262.
- Torre, C., Beziehung zwischen den Charakteristiken und einer Berührungstransformation. S. 32.
- Vitovec, F., Die ausgeprägte Streckgrenze als Stabilitätsproblem. S. 4.
- , Metallurgical Engineering. Von R. Schuhmann, jr. Band I. (Buchbesprechung.) S. 156.
- Weirich, H., Beitrag zur Stabilität des Schwingungsvorganges im Differentialwasserschloß. S. 236.
- Zerna, W., Berechnung von Translations-schalen. S. 181.

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Herausgeber und Eigentümer: Springer-Verlag in Wien I, Mülkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Franz Magyar, Wien IV, Technische Hochschule, Karlsplatz 13. — Druck: Manzsche Buchdruckerei, Wien IX, Lustkandlgasse 52.

Der Wärme- und Kälteschutz in der Industrie. Von Dr.-Ing. habil. J. S. Cammerer, Tutzing. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 126 Abbildungen. VII, 360 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 36.—

Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues. Herausgegeben vom Fachverband Stahlbau. Deutscher Stahlbau-Verband. Bad Pyrmont. Schriftleitung: Professor Dr.-Ing. Kurt Klöppel, Technische Hochschule Darmstadt.

Heft 7: **Über den Einfluß hochfester Stähle auf Gewichtsparsnis und Bauart im Stahlbrückenbau.** Von Dr.-Ing. Otfried Erdmann, Aschaffenburg. Mit 28 Abbildungen. IV, 83 Seiten. 4°. 1950. DM 10.—

Heft 9: **Berechnung von einfachen und mehrfachen Rautenträgern.** Von Dr.-Ing. Maria Eßlinger, Saarbrücken. Mit 72 Abbildungen. VII, 117 Seiten. 4°. 1953. DM 15.—

Ventilatoren. Entwurf und Betrieb der Schleuder- und Schraubengebläse. Von Dr.-Ing. Bruno Eck. Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 344 Abbildungen. XI, 304 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 36.—

Elastizität und Festigkeit im Rohrleitungsbau. Statische Berechnung der Rohrleitungen und ihrer Einzelteile. Von Dipl.-Ing. Oberingenieur Helmut von Jürgensson, VDI, Düsseldorf. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 236 Abbildungen, 38 Zahlentafeln und 31 Zahlenbeispielen. VIII, 379 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 39.—

Kreiselgebläse und Kreiselverdichter radikaler Bauart. Von Dr.-Ing. habil. Friedrich Kluge †. VDI, VDEH, ASME, OLEAN, New York (USA). Mit 377 Abbildungen. XV, 301 Seiten. 4°. 1953. Ganzleinen DM 58.50

Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Von Dr.-Ing. R. Zurmühl, Darmstadt. Mit 114 Abbildungen. XI, 481 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 28.50

Soeben erschienen:

Wärmespannungen

infolge stationärer Temperaturfelder

Von

Dipl.-Ing. Dr. techn. **Ernst Melan** und

o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien, wirkl.
Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften

Dipl.-Ing. Dr. techn. **Heinz Parkus**

Professor am Michigan State College, East-Lansing,
Michigan, USA

Mit 30 Textabbildungen. V, 114 Seiten. 1953

Ganzleinen S 110.—, DM 18.50, \$ 4.40, sfr. 18.90

Trotz der unzweifelhaften Wichtigkeit, die durch Temperaturänderungen hervorgerufene Spannungen in der Praxis besitzen, gibt es bisher keine zusammenfassende Darstellung ihrer Theorie. Wohl finden sich in verschiedenen Lehrbüchern der Elastizitätstheorie vereinzelte Hinweise und Beispiele; der überwiegende Teil der Untersuchungen ist aber in zahlreichen Einzelveröffentlichungen über viele Zeitschriften verstreut. Wenn daher in diesem Buch der Versuch unternommen wird, eine einheitliche und zusammenfassende Theorie der Wärmespannungen zu geben, so glauben die beiden Autoren, durch ihre Arbeit einem wirklichen Bedürfnis entgegengekommen zu sein.

Im vorliegenden Buch werden ausschließlich stationäre Temperaturfelder unter der Annahme der klassischen Theorie der Elastizität, also eines linearen Zusammenhanges zwischen Spannungen und Verzerrungen, untersucht, wobei die Unabhängigkeit der elastischen und thermischen Materialkonstanten von der Temperatur vorausgesetzt ist. Wenn auch hierdurch die Anwendung der Theorie auf verhältnismäßig kleine Temperaturänderungen beschränkt bleibt, so umfaßt sie doch einen großen Problemkreis und liefert die Voraussetzungen für die Lösung vieler praktischer Aufgaben. Eine weitere Arbeit, die auch die nichtstationären Temperaturfelder berücksichtigt und auf elastisch-plastische Spannungszustände eingeht, ist geplant.

Soeben erschienen:

Die Pumpwerksarten

Steuer- und Schaltmöglichkeiten für elektrisch betriebene Kreiselpumpen

Von

Dipl.-Ing. **Friedrich Koller**

zur Zeit Projektingenieur bei Klein, Schanzlin & Becker, München

Mit 120 Textabbildungen. VII, 142 Seiten. 1953

Steif geheftet S 96.—, DM 16.—, \$ 3.80, sfr. 16.30

Das vorliegende Buch ermöglicht dem Planer und Konstrukteur, die optimale Lösung bei der Projektierung einer Pumpwerksanlage zu finden. Es vermittelt ihm Kenntnisse über die grundsätzliche Arbeitsweise von Kreiselpumpen und ihre Betriebseigenschaften, die verschiedenen Bau- und Betriebsarten von Pumpenanlagen und die hydraulischen und elektrischen Steuer- und Schaltmöglichkeiten für Elektrokreiselpumpen. Neben dem hydraulischen Arbeitsbild wird immer der elektrische Schaltplan und eine schematische Darstellung des Pumpwerks gebracht.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria